

# Plissage des variétés hyperboliques de dimension 3

CYRIL LECUIRE

Mars 2002, révisé février 2004

**Abstract** : We give a characterization of the measured geodesic laminations which can occur as the bending measured lamination of any geometrically finite metric on a 3-manifold. When the 3-manifold has incompressible boundary, such a characterization has already been given by F. Bonahon and J.-P. Otal. Here we deal with the general case..

## 1 Introduction

### 1.1 Application de plissage des variétés hyperboliques

Nous dirons d'une variété différentielle  $M$  qu'elle est hyperbolique si son intérieur admet une métrique riemannienne complète de courbure sectionnelle  $-1$ . Si  $M$  est une variété de dimension 3, compacte, à bord, alors d'après le théorème d'hyperbolisation de Thurston,  $M$  est hyperbolique si et seulement si elle est irréductible et atoroidale. Dans la suite, nous allons considérer une variété  $M$  de dimension 3, compacte, orientable et hyperbolique, mais nous excluons les cas où  $M$  est homéomorphe à un tore solide  $D \times S^1$  ou à un tore épaissi  $T \times [0, 1]$ .

Un objet important dans l'étude d'une métrique hyperbolique complètes  $\sigma$  sur l'intérieur de  $M$  est son coeur convexe  $N(\sigma)$  qui est le plus petit fermé non vide et convexe pour la métrique  $\sigma$ . Dans cet article, nous allons considérer les métriques sur l'intérieur de  $M$  à isotopie près. Deux métriques  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sur l'intérieur de  $M$  sont dites isotopes s'il existe un difféomorphisme  $f : M \rightarrow M$  isotope à l'identité et tel que  $\sigma_2 = f^*\sigma_1$ . Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont isotopes, alors  $f|_{N(\sigma_1)} : N(\sigma_1) \rightarrow N(\sigma_2)$  est une isométrie. Il est donc légitime de parler du coeur convexe  $N(\sigma)$  d'une métrique hyperbolique  $\sigma$  définie à isotopie près. Lorsque  $N(\sigma)$  a un volume fini, la métrique  $\sigma$  est dite géométriquement finie. Dans ce cas le bord de  $N(\sigma)$  est homéomorphe à la réunion  $\partial_{\chi < 0} M$  des composantes de  $\partial M$  de caractéristique d'Euler strictement négative de laquelle ont été ôtées des courbes simples correspondant aux pointes de rang 1 de  $\sigma$ . L'étude de  $\partial N(\sigma)$  a débuté dans [Th1]; W. Thurston y explique notamment qu'une lamination géodésique mesurée - appelée lamination géodésique mesurée de plissage de  $\sigma$  - décrit la manière dont cette surface  $\partial N(\sigma)$  est plissée.

Si au moins une composante de  $\partial M$  a une caractéristique d'Euler strictement négative, la théorie d'Ahlfors-Bers montre que l'intérieur de  $M$  admet beaucoup de métriques hyperboliques géométriquement finies. Dans le cas contraire,  $\partial M$  est composé uniquement de tores et d'après le théorème de rigidité de Mostow, l'intérieur de  $M$  admet une unique (à isotopie près) métrique hyperbolique géométriquement finie. Dans la suite, on se restreindra au cas où  $\partial M$  possède au moins une composante de caractéristique d'Euler strictement négative. Si  $\mathcal{GF}(M)$  est l'espace des classes d'isotopie de métriques géométriquement finies sur l'intérieur de  $M$ , on a alors une application  $\mathcal{GF}(M) \rightarrow \mathcal{ML}(\partial M)$  qui à une métrique géométriquement finie associe sa lamination géodésique mesurée de plissage; c'est l'application de plissage de

$M$ . La continuité et la différentiabilité de cette application ont été étudiées dans [KeS] et [Bo4]. Cet article est consacré à la description intrinsèque de l'image de cette application.

Dans [BoO], F. Bonahon et J.-P. Otal ont posé le problème suivant : quelles laminations mesurées peuvent apparaître comme lamination de plissage d'une métrique géométriquement finie ? Ils ont répondu à cette question lorsque l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :

- le support de  $\lambda$  est une multi-courbe ;
- $\partial M$  est incompressible.

Dans cet article, nous donnons une réponse complète à cette question, par le théorème suivant :

**Théorème 1.** *Soient  $M$  une variété hyperbolique compacte, orientable de dimension 3 et  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$  une lamination géodésique mesurée sur son bord. Il existe sur l'intérieur de  $M$  une métrique hyperbolique géométriquement finie non-fuchsienne  $\sigma$  dont  $\lambda$  est la lamination géodésique mesurée de plissage si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :*

- a) *toute feuille fermée de  $\lambda$  a un poids inférieur ou égal à  $\pi$  ;*
- b) *l'intersection des adhérences dans  $\overline{\tilde{M}}$  de deux composantes connexes du complémentaire de  $p^{-1}(\lambda)$  dans  $\partial \tilde{M}$  est soit vide, soit l'adhérence d'une feuille  $\tilde{l} \subset p^{-1}(\lambda)$  dont la projection sur  $\partial M$  est une feuille fermée  $l$  ;*
- c)  *$i(\lambda, \partial D) > 2\pi$  pour tout disque essentiel  $D$ .*

On notera  $\mathcal{P}(M)$  l'ensemble des laminations géodésiques de  $\mathcal{ML}(\partial M)$  qui vérifient les conditions a), b) et c).

Dans cet énoncé,  $\tilde{M}$  désigne le revêtement universel de  $M$  et  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  la projection du revêtement. On compactifie  $\tilde{M}$  de la manière suivante : munissons  $M$  d'une métrique hyperbolique géométriquement finie  $\sigma$  dont toutes les pointes sont des pointes de rang 2 (l'existence d'une telle métrique est assurée par le théorème d'hyperbolisation de Thurston et par le théorème de chirurgie de Dehn hyperbolique, cf. [Th1]) et notons  $N(\sigma)^{ep}$  le complémentaire dans  $N(\sigma)$  de voisinages des pointes de  $\sigma$ . Choisissons une isométrie entre le revêtement universel de l'intérieur de  $M$  et  $\mathbb{H}^3$ , elle nous permet de considérer  $\tilde{N}(\sigma)^{ep}$  comme un fermé non compact de  $\mathbb{H}^3$ . Comme  $\sigma$  est géométriquement finie, il existe un homéomorphisme naturel entre  $M$  et  $N(\sigma)^{ep}$  qui nous permet maintenant d'interpréter  $\tilde{M}$  comme un fermé de  $\mathbb{H}^3$ . La compactification  $\overline{\tilde{M}}$  de  $\tilde{M}$  est l'adhérence de ce fermé dans la compactification usuelle de  $\mathbb{H}^3$  par la boule unité. Si l'on remplace la métrique  $\sigma$  par une autre métrique  $\sigma'$  dont les pointes sont des pointes de rang 2, les deux compactifications ainsi obtenues sont homéomorphes, cette définition est donc indépendante de la métrique choisie.

La condition c) vient de la formule de Gauss-Bonnet appliquée à un disque essentiel (cf. [BoO]). Lorsque  $\lambda$  est la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie non-fuchsienne, les composantes de  $\partial \tilde{M} - p^{-1}(\lambda)$  sont les faces du bord du convexe  $N(\rho)$ . La condition b) garantit que les composantes du complémentaire de  $\lambda$  se comportent sur  $\tilde{M}$  comme les faces d'un tel convexe. Comme on le verra dans la section 3, on peut remplacer cette condition par l'une des conditions suivantes :

- b<sub>1</sub>) *la lamination géodésique  $\lambda$  est anannulaire : c'est-à-dire que  $\lambda$  intersecte transversalement toute courbe simple fermée qui peut être homotopée dans un tore de  $\partial M$  et toute paire  $(l_1, l_2)$  de géodésiques simples (éventuellement confondues) de  $\partial M$  dont des relevés distincts à  $\partial \tilde{M}$  ont les deux mêmes bouts.*

- b<sub>2</sub>)  *$\exists \eta > 0$  tel que, pour tout anneau essentiel  $a$ ,  $i(\partial a, \lambda) \geq \eta$ .*

La condition  $b_1$ ) est analogue à la condition 2') du théorème 1 de [BoO]. D'après la remarque qui suit, si  $\lambda$  est une multi-courbe pondérée, la condition  $b_2$ ) est équivalente à la condition 2 du théorème 2 de [BoO]. Le lien entre ces deux conditions  $b_1$ ) et  $b_2$ ) vient du fait que les laminations annulaires apparaissent souvent comme limites géométriques de bords d'anneaux (cf. appendice C).

**Remarque.** Comme  $M$  est orientable, si  $A$  est un ruban de Möbius proprement plongé; alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}(\partial A)$  de son bord tel que  $\partial\mathcal{V}(\partial A)$  borde un anneau essentiel et on a donc  $i(\partial A, \lambda) \geq \frac{\eta}{2}$ .

Ce théorème fournit une description complète de l'image de l'application de plissage. Si  $M$  est un bretzel, c'est-à-dire une somme connexe le long du bord de tores solides  $D \times S^1$ , pour obtenir l'image de l'application de plissage, il suffit d'ajouter aux laminations géodésiques mesurées de  $\mathcal{P}(M)$ , les laminations géodésiques mesurées de plissages des métriques fuchsienues. A une métrique fuchsienne est associée un homéomorphisme entre  $M$  et un fibré en intervalles, éventuellement tordu, sur une surface compacte  $\Sigma$  à bord non vide. Le lieu de plissage est alors une section du fibré au-dessus de  $\partial\Sigma$ , chaque feuille étant munie d'une mesure de poids  $\pi$ . Si  $M$  n'est pas un bretzel, l'image de l'application de plissage est  $\mathcal{P}(M)$ .

## 1.2 Esquisse de la preuve du théorème 1

Après avoir présenté quelques définitions, nous décrivons quelques propriétés de nature topologique de  $\mathcal{P}(M)$ . Nous montrerons en particulier que la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie sur l'intérieur de  $M$  appartient à  $\mathcal{P}(M)$  et que, dans la définition de  $\mathcal{P}(M)$ , on peut remplacer la condition  $b$ ) par les conditions  $b_1$ ) ou  $b_2$ ) ci-dessus. Ceci occupe les sections 2 et 3, quelques preuves étant reportées à l'appendice C.

Afin de montrer que ces nouvelles conditions sont suffisantes, nous allons ensuite construire, pour une lamination géodésique mesurée  $\lambda \subset \mathcal{P}(M)$  donnée, une métrique sur l'intérieur de  $M$  dont elle est la lamination géodésique mesurée de plissage. Pour cette construction, nous suivrons la stratégie de la preuve du théorème 1 de [BoO]. Néanmoins, l'hypothèse " $\partial M$  est incompressible" joue plusieurs fois un rôle essentiel dans [BoO]. Pour nous affranchir de cette hypothèse, nous allons utiliser des arguments différents de ceux de [BoO] (en particulier un résultat récent de [KIS] et un lemme d'approximation des courbes "légèrement plissées").

L'élément principal de cette stratégie de [BoO] est le suivant. On considère une suite  $(\sigma_n)$  de métriques géométriquement finies dont les laminations mesurées de plissage  $(\lambda_n)$  sont des multi-courbes pondérées qui convergent (en un sens qui sera défini par la suite) vers  $\lambda$ . Alors il existe une suite extraite de  $(\sigma_n)$  qui converge algébriquement vers une métrique géométriquement finie  $\sigma_\infty$  dont  $\lambda$  est la lamination géodésique mesurée de plissage. La preuve de ce résultat (nommé lemme de fermeture) est divisée en deux étapes qui occupent la section 4.

La première étape consiste à prouver l'existence de la métrique  $\sigma_\infty$ . Pour cela, on commencera par montrer que la suite  $(l_{\sigma_n}(\lambda_n))$  des longueurs des laminations géodésiques mesurées  $\lambda_n$  est bornée, puis on raisonnera par l'absurde. Supposons que  $(\sigma_n)$  n'ait pas de valeur d'adhérence pour la topologie algébrique; d'après la théorie de J. Morgan et P.B. Shalen ([MoS1]), une suite extraite de  $(\sigma_n)$  (que pour simplifier nous noterons aussi  $(\sigma_n)$ ) tend vers une action minimale, à petits stabilisateurs d'arêtes de  $\pi_1(M)$  sur un arbre réel  $\mathcal{A}$ . Soit  $\partial^j M$  une composante connexe de  $\partial_{\chi < 0} M$ ; grâce à l'application  $i_* : \pi_1(\partial^j M) \rightarrow \pi_1(M)$  induite par l'inclusion, on a une action de  $\pi_1(\partial^j M)$  sur  $\mathcal{A}$ . Si  $\partial^j M$  est incompressible, d'après [Sk], cette action est duale d'une lamination géodésique mesurée  $\beta$ . D'après un théorème de continuité de J.-P. Otal ([Ot2]), on a alors  $i(\beta, \lambda) = 0$ . Lorsque  $\partial M$  est incompressible, notons  $\beta$  la

réunion des laminations géodésiques mesurées obtenues en faisant cette construction pour chaque composante de  $\pi_1(\partial^j M)$ . Dans ce cas, F. Bonahon et J.-P. Otal déduisent de [MoS2] et de l'étude de la sous-variété caractéristique de  $M$  que  $\beta$  est annulaire. Ceci contredit les conditions 2) et 2') de [BoO] (ou la condition  $b_1$ ) ci-dessus), ce qui permet de conclure. Lorsque  $\partial^j M$  est compressible, on ne peut plus appliquer le théorème de Skora. Mais, d'après [MoO], il existe quand même une lamination  $\beta \in \mathcal{ML}(\partial^j M)$  et un morphisme équivariant de l'arbre  $\mathcal{A}_\beta$ , dual de  $\beta$ , dans  $\mathcal{A}$ . Comme l'action de  $\pi_1(\partial^j M)$  n'est pas à petit stabilisateur d'arrêtes, ce morphisme peut avoir des points de branchement et il peut y avoir plusieurs laminations géodésiques mesurées distinctes pour lesquelles il existe un tel morphisme. Nous verrons alors comment utiliser le fait que  $(l_{\sigma_n}(\lambda_n))$  est bornée et le théorème de continuité de J.-P. Otal pour construire une telle lamination  $\beta$  qui n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement. Un résultat de [KIS] et l'étude d'une sous-variété caractéristique (au sens de [Jo] et [JaS], cf. section 2.3) "relative à  $\beta$ " montrent que cette lamination  $\beta$  est annulaire et la condition  $b_1$ ) fournit alors la contradiction cherchée.

La seconde étape consiste à établir que  $\sigma_\infty$  est géométriquement finie et que  $\lambda$  en est la lamination mesurée de plissages. Dans [BoO], les auteurs utilisent la théorie des bouts des variétés hyperboliques dont le groupe fondamental est indécomposable, développée dans [Bo2], et le théorème de revêtement de [Ca] pour montrer que  $\lambda$  est réalisée dans  $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$  ( $\rho_\infty : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  étant la limite des représentations  $\rho_n$  associées à  $\sigma_n$ ). Nous allons traiter cette partie de la démonstration de manière complètement différente : nous utiliserons un lemme d'approximation des courbes "légèrement plissées" (cf. appendice A) pour trouver une suite extraite  $(\sigma_n)$  telle que la suite des métriques induites sur  $\partial_{\chi < 0} M$  converge algébriquement. Nous en déduisons que  $\lambda$  est réalisée dans  $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ , ce qui nous permettra d'achever cette seconde étape comme [BoO].

Nous pourrions enfin conclure la preuve du théorème 1 en montrant l'existence d'une suite de multi-courbes  $(\lambda_n)$  vérifiant les conditions  $a)$ ,  $b_2)$  et  $c)$  et convergeant vers  $\lambda$ . Comme elles satisfont les hypothèses du théorème 2 de [BoO], alors il existe une suite  $(\sigma_n)$  de métriques géométriquement finies telles que  $\lambda_n$  est la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\sigma_n$ . Le lemme de fermeture permet alors d'achever la preuve du théorème 1.

Dans l'appendice B, on trouvera les propriétés des laminations géodésiques sur le bord des variétés hyperboliques utilisées dans le texte.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Jean-Pierre Otal pour ses indications, sa gentillesse et sa grande patience. Je remercie également Francis Bonahon, Gero Kleineidam et Juan Souto pour les discussions fructueuses que j'ai eues avec eux et qui m'ont permis de simplifier cet article.

## 2 Définitions

### 2.1 Définitions générales

Munissons chaque composante de  $\partial_{\chi < 0} M$  d'une métrique hyperbolique complète.

Une *lamination géodésique* sur  $\partial M$  est un compact qui est réunion disjointe de géodésiques complètes plongées  $\partial_{\chi < 0} M$ ; on note  $\mathcal{L}(\partial M)$  l'espace des laminations géodésiques sur  $\partial M$ . Une *multi-courbe* est une lamination géodésique dont toutes les feuilles sont fermées (c'est-à-dire une réunion de géodésiques fermées simples disjointes). Une lamination géodésique  $\lambda$  est dite *minimale* si toute demi-feuille est dense dans  $\lambda$  (auquel cas  $\lambda$  est soit une

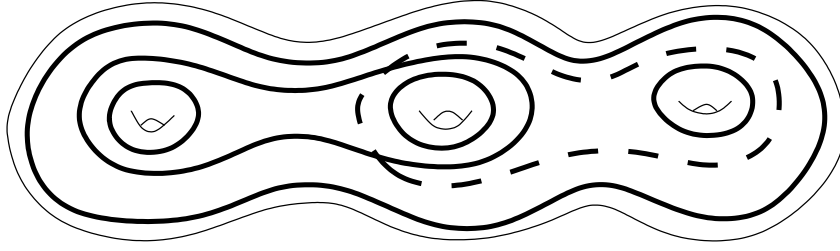


FIG. 1 – Exemple : en munissant chacune des composantes de la multi-courbe dessinée en gras d'un poids  $> \frac{2\pi}{3}$ , on obtient la lamination mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie sur l'intérieur d'un bretzel de genre 3.

géodésique fermée, soit un *minimal exceptionnel*). Une feuille d'une lamination géodésique  $\lambda$  est dite *récurrente* si elle est contenue dans une lamination géodésique minimale (cette lamination géodésique minimale étant automatiquement contenue dans  $\lambda$ ). Toute lamination géodésique  $\lambda$  est la réunion disjointe d'un nombre fini de laminations géodésiques minimales (appelées minimaux de  $\lambda$ ) et de feuilles non-récurrentes. Une *lamination géodésique mesurée* est une lamination géodésique munie d'une mesure transverse de support plein. On notera  $\mathcal{ML}(\partial M)$  l'espace des laminations géodésiques mesurées sur  $\partial M$  muni de la topologie faible sur les mesures. Pour une exposition plus complète des propriétés des laminations géodésiques, le lecteur pourra se reporter à [CaB], [Bo3] ou à l'appendice de [Ot3].

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux laminations géodésiques, on dira que  $\alpha$  *intersecte  $\beta$  transversalement* si  $\alpha$  possède au moins une feuille qui intersecte une feuille de  $\beta$  transversalement. Par extension, on dira que deux laminations géodésiques mesurées s'intersectent transversalement si leurs supports s'intersectent transversalement.

A une lamination géodésique mesurée  $\lambda$  sur une surface connexe  $S$ , on associe de manière canonique un arbre réel  $\mathcal{A}_\lambda$  appelé arbre dual de la lamination. Remplaçons les feuilles fermées de  $\lambda$  par des anneaux feuilletés par des courbes fermées parallèles. Notons  $\mathcal{F}_\lambda$  le feuilletage mesuré partiel de  $S$  ainsi obtenu et  $\check{\mathcal{F}}_\lambda$  sa préimage dans le revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de  $S$ . La pseudo-distance sur  $\mathbb{H}^2$  obtenue en intégrant la mesure transverse de  $\check{\mathcal{F}}_\lambda$  est continue et le quotient de  $\mathbb{H}^2$  par cette pseudo-distance est un arbre réel  $\mathcal{A}_\lambda$  appelé arbre dual de  $\lambda$ . Le groupe fondamental de  $S$  agit sur  $\mathcal{A}_\lambda$  et cette action est minimale à petits stabilisateurs d'arrêtes. Pour plus de détails, voir [Ot3] ou [Ka].

Un disque *essentiel* dans  $M$  est un disque  $D$  proprement plongé dans  $M$  qui ne peut pas être homotopé dans un disque de  $\partial M$  par une homotopie fixant  $\partial D$ . La courbe simple  $\partial D$  est appelée un *méridien*. D'après le lemme de Dehn (cf. [He]), une courbe simple  $c \subset \partial M$  qui est homotope à un point dans  $M$  est un méridien. Une sous-variété  $N$  de  $M$  est *incompressible* si  $N$  n'est pas simplement connexe et si l'application  $i_* : \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(M)$  induite par l'inclusion est injective. Un tore essentiel dans  $M$  est un tore incompressible qui ne peut pas être homotopé dans  $\partial M$ . Un anneau ou ruban de Möbius *essentiel* est un anneau ou ruban de Möbius proprement plongé, incompressible, qui ne peut pas être homotopé dans un anneau ou ruban de Möbius de  $\partial M$  par une homotopie fixant  $\partial a$ . Si une composante  $\partial^2 a$  de  $\partial a$  est contenue dans un tore de  $\partial M$ ; alors l'autre composante  $\partial^1 a$  de  $\partial a$  est homotope à une géodésique simple fermée. En la munissant d'une mesure de Dirac de poids 1, on obtient une lamination géodésique mesurée que nous noterons encore  $\partial a$ ; nous appellerons cette géodésique simple fermée une *courbe parabolique* (en effet, cette courbe est un parabolique

accidentel pour toute métrique géométriquement finie sur l'intérieur de  $M$ ). Si le bord de  $a$  ne contient pas de courbe parabolique, on peut homotoper  $a$  de façon à ce que son bord soit une lamination géodésique, en associant à cette lamination des poids égaux au degré de la restriction de l'homotopie au bord de  $a$ , on en fait une lamination géodésique mesurée que nous noterons  $\partial a$ . De manière similaire, si  $D$  est un disque essentiel, en munissant la géodésique fermée simple homotope à  $\partial D$  d'une mesure de Dirac de poids 1, on obtient une lamination géodésique mesurée  $\partial D$ . Soit  $\lambda \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  et  $a \subset M$  un disque, anneau ou ruban de Möbius essentiel alors  $i(\lambda, \partial a)$  est le nombre d'intersection de  $\lambda$  et de la lamination géodésique mesurée  $\partial a$  définie précédemment.

Soit  $\sigma$  une métrique hyperbolique (définie à isotopie près) sur  $\text{int}(M)$ ; la donnée d'un point base  $x$  dans  $M$ , identifié au point  $O \in \mathbb{H}^3$ , et d'un repère orthonormé de l'espace tangent en  $x$ , identifié au repère orthonormé canonique de l'espace tangent  $T_O\mathbb{H}^3$ , permet de définir une représentation  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ , fidèle est discrète. Si on change le point base  $x$  ou le repère de l'espace tangent en  $x$ , on obtient une nouvelle représentation  $\rho'$  qui est conjuguée à  $\rho$ . L'image  $\rho(\pi_1(M))$  est un groupe Kleinien (c'est-à-dire un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ ) finiment engendré, sans torsion et  $\text{int}(M)$  munie de la métrique  $\sigma$  est isométrique à  $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$ . Notons  $N(\rho)$  le cœur de Nielsen de  $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$ , qui est le quotient par  $\rho(\pi_1(M))$  de l'enveloppe convexe  $H(\rho)$  de l'ensemble limite  $L_\rho$  de  $\rho(\pi_1(M))$  (voir [Th1, chap 8] pour plus de détails). Ce convexe  $N(\rho)$  est isométrique au cœur convexe  $N(\sigma)$  défini dans l'introduction, ce qui nous permet de confondre les deux. La partie épaisse,  $N(\rho)^{ep}$  du cœur de Nielsen, est le complémentaire dans  $N(\rho)$  de la partie cuspidale de  $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$ . La représentation  $\rho$  est dite géométriquement finie si  $N(\rho)^{ep}$  est compact (une définition ici équivalente est que  $N(\rho)$  a un volume fini) et convexe cocompacte si  $N(\rho)$  est compact. Lorsque  $\rho$  est géométriquement finie, le bord de  $N(\rho)^{ep}$  est une réunion de tores et de surfaces compactes; chacune de ces surfaces est une réunion d'anneaux, contenus dans le bord de la partie cuspidale et de surfaces, éventuellement à bord, incluses dans le bord de  $N(\rho)$ . Chacune de ces dernières surfaces est plissée le long d'une lamination géodésique (cf. [Th1, chap 8]). On définit le lieu de plissage de  $\rho(\pi_1(M))$  comme la réunion de ces laminations géodésiques  $\lambda^i$  et des courbes simples, âmes des anneaux  $a^i$  correspondant aux pointes de rang 1. On munit ce lieu de plissage d'une mesure transverse qui mesure l'intensité du plissage de  $\partial N(\rho)$  le long des laminations géodésiques  $\lambda^i$  (cf. [EpM]) et associe aux âmes des anneaux  $a^i$  une mesure de Dirac de poids  $\pi$ . Si  $\rho$  n'est pas une représentation fuchsienne, la rétraction de  $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$  sur  $N(\rho)$  permet de définir (à isotopie près) un homéomorphisme naturel  $h : M \rightarrow N(\rho)^{ep}$ . Cet homéomorphisme  $h$  permet d'interpréter le lieu de plissage de  $\partial N(\rho)$  comme une lamination géodésique mesurée  $\lambda_\sigma \in \mathcal{ML}(\partial M)$ , dépendant seulement de la classe de la classe d'isotopie de  $\sigma$ , qu'on appelle lamination géodésique mesurée de plissage de la métrique géométriquement finie  $\sigma$ . On peut également préciser la définition de  $\overline{M}$  donnée dans l'introduction : soit  $\rho$  une représentation géométriquement finie de  $\pi_1(M)$  dont les sous-groupes paraboliques maximaux sont d'ordre deux et  $h : M \rightarrow N(\rho)^{ep}$  l'homéomorphisme naturel; on définit  $\overline{M}$  comme l'adhérence dans  $\overline{\mathbb{H}^3}$  de  $H(\rho)^{ep} = \tilde{N}(\rho)^{ep}$ , on a alors  $\partial\overline{M} - \partial\tilde{M} = L_\rho$ . Soit  $\tilde{l} \subset \partial\tilde{M}$  une géodésique et  $\tilde{l}$  sont adhérence dans  $\overline{M}$ ; on dira que  $\tilde{l}$  a deux bouts bien définis dans  $\partial\overline{M}$  si  $\tilde{l} - \tilde{l}$  est constitué de 1 ou 2 points de  $L_\rho$ .

## 2.2 Laminations géodésiques sur une variété à bord compressible

Munissons  $M$  d'une métrique hyperbolique géométriquement finie  $\sigma$  dont toutes les pointes sont des pointes de rang 2, d'une représentation  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  qui induise  $\sigma$  et d'un homéomorphisme  $h : M \rightarrow N(\rho)^{ep}$ . Chaque composante de  $\partial_{\chi < 0} M$  est munie de la métrique induite par la restriction de  $h$  à  $\partial M$ . Comme  $\partial N(\rho)^{ep}$  est une surface réglée, cette métrique est hyperbolique (cf. [Ro]). Dans la suite du texte, lorsque nous montrerons des propriétés topologiques de  $M$  ou des laminations sur  $\partial M$ , nous supposerons que  $M$  est munie de la métrique définie précédemment. Comme dans l'introduction, on notera  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  la projection du revêtement universel.

Notons  $\mathcal{M}$  l'ensemble des multi-courbes de  $\partial M$  dont chaque composante borde un disque essentiel de  $M$ . Soit  $\mathcal{M}_{\text{géom}}$  le complété de  $\mathcal{M}$  pour la topologie de Hausdorff (que nous appellerons aussi topologie géométrique). Les définitions suivantes sont utiles à la description des laminations géodésiques de  $\mathcal{M}_{\text{géom}}$ .

Une feuille  $\tilde{l}$  d'une lamination géodésique  $\tilde{\alpha} \subset \partial \tilde{M}$  est dite homoclinique lorsqu'elle contient deux suites de points  $(x_n)$  et  $(y_n)$  tels que la distance entre les points  $x_n$  et  $y_n$  mesurée sur la feuille tend vers l'infini avec  $n$ , tandis que leur distance dans  $\tilde{M}$  reste bornée (cette définition diffère de celles de [Ot1] où une telle feuille est appelé faiblement homoclinique). Une feuille  $l$  d'une lamination géodésique  $\alpha \subset \partial M$  est dite homoclinique si elle possède un relevé à  $\partial \tilde{M}$  qui est homoclinique. Un critère de Casson dit qu'une lamination géodésique connexe est dans  $\mathcal{M}_{\text{géom}}$  si et seulement si elle contient une feuille homoclinique. Nous n'utiliserons pas cette équivalence, mais seulement le fait qu'une limite géométrique de méridiens contient une feuille homoclinique (théorème B.1, voir aussi [Ot1]). En pratique nous servirons principalement de la propriété suivante :

- une feuille  $\tilde{l}$  qui a deux bouts biens définis et distincts dans  $\overline{\partial \tilde{M}}$  n'est pas homoclinique.

Deux feuilles distinctes  $\tilde{l}_1$  et  $\tilde{l}_2$  d'une lamination géodésique  $\tilde{\alpha} \subset \partial \tilde{M}$  sont dites biasymptotes si chacune d'elles a deux bouts biens définis dans  $\overline{\tilde{M}}$  et si leurs adhérences dans  $\overline{\partial \tilde{M}}$  ont les deux mêmes extrémités. Une lamination géodésique  $\alpha \in \mathcal{L}(\partial M)$  dont la préimage  $p^{-1}(\alpha)$  contient deux feuilles biasymptotes sera dite annulaire. Par exemple le bord d'un anneau ou d'un ruban de Möbius essentiel qui ne contient pas de courbe parabolique est une lamination géodésique annulaire. Une lamination géodésique  $\lambda$  sera dite anannulaire si  $\lambda$  intersecte transversalement toutes les laminations annulaires et toutes les courbes paraboliques de  $\partial M$ .

Soit  $c$  une géodésique simple fermée sur le bord de  $M$  ; un arc de compression vers  $c$  est un arc  $\kappa$  plongé (on ne considèrera dans la suite que des arcs géodésiques) tel que  $c \cap \kappa = \partial \kappa$  et qui est homotope dans  $M$  relativement à  $\partial \kappa$  à un arc de  $c$ .

Une lamination géodésique  $\lambda$  est dite en position prétendue par rapport à une multi-courbe  $\mu$  si et seulement si

- 1)  $\lambda$  ne contient pas d'arc de compression vers  $\mu$  ;
- 2) chaque feuille de  $\lambda$  intersecte transversalement  $\mu$ .

L'ensemble des laminations en position prétendue par rapport à une multi-courbe  $\mu$  fixée est ouvert pour la topologie géométrique. En effet, soient  $\lambda$  une lamination géodésique en position prétendue par rapport à  $\mu$  et  $\lambda_n$  une suite de lamination géodésique convergeant géométriquement vers  $\lambda$ . Supposons que  $\lambda_n$  contient un arc de compression  $k_n$  vers  $\mu$ . Si  $l(k_n)$  est bornée, quitte à extraire,  $k_n$  converge pour la topologie de Hausdorff vers un arc  $k \subset \lambda$ . Cet arc  $k$  est un arc de compression vers  $\mu$ , ce qui contredit la propriété 1) ci-dessus. Par conséquent,  $l(k_n)$  n'est pas bornée ; quitte à extraire,  $k_n$  converge pour la topologie de

Hausdorff et sa limite contient alors une lamination géodésique  $k \subset \alpha$  qui n'intersecte pas  $\mu$ , ceci contredit 2).

Soit  $S \subset \partial M$  une surface compacte compressible dont le bord ne contient pas de méridiens et  $\mu \subset S$  une famille de méridiens disjoints. Notons  $M'$  la variété obtenue en découpant  $M$  le long d'une famille de disques essentiels bordée par  $\mu$  et  $S' \subset \partial M'$  la surface obtenue en découpant  $S$  le long de  $\mu$  et en recollant le long de chaque composante de bord ainsi formée un disque de  $\partial M'$  qu'elle borde. La multi-courbe  $\mu$  est un système admissible de méridiens de  $S$  si l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :

- $M'$  est une boule et  $S' = \partial M'$  ;
- $S'$  est incompressible dans  $M'$  (en particulier,  $S'$  ne contient pas de sphères).

L'existence et quelques propriétés de ces systèmes admissibles sont discutées en annexe B.

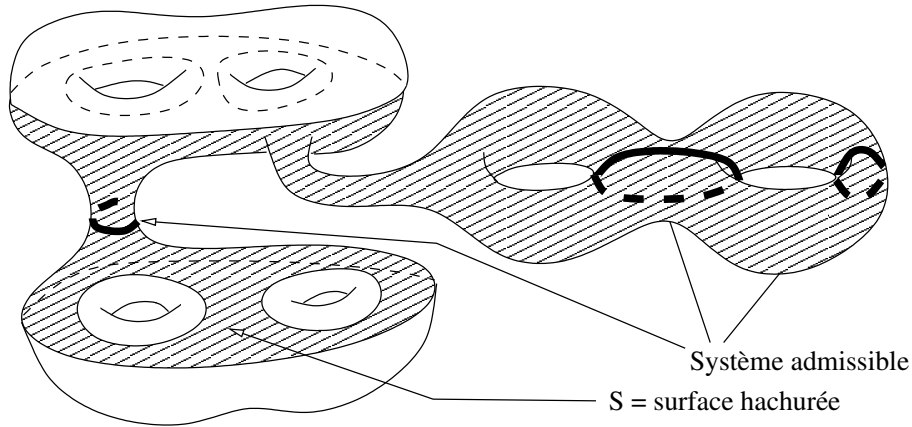


FIG. 2 – Un système admissible de méridiens de  $S$ .

### 2.3 Sous-variété caractéristique

Soit  $\Sigma \subset \partial M$  une surface compacte incompressible ; une sous-variété  $N \subset M$  qui est homéomorphe à un fibré en intervalles (ou  $I$ -fibré) sur une surface compacte à bord est essentiel dans  $(M, \Sigma)$ , si  $N$  est incompressible, si  $N \cap \partial M \subset \Sigma$  est le  $\partial I$ -fibré correspondant et si  $N$  ne peut pas être homotopé dans  $\Sigma$  par une homotopie qui fixe le  $\partial I$ -fibré  $N \cap \Sigma$ . Nous dirons qu'une sous-variété  $N$  de  $M$  qui est homéomorphe à un tore solide  $D^2 \times S^1$  ou à un tore épaissi  $S^1 \times S^1 \times I$  est essentielle dans  $(M, \Sigma)$  si  $N$  est incompressible,  $N \cap \partial M \subset \Sigma$ ,  $N$  ne peut pas être homotopée dans  $\partial M$  par une homotopie qui fixe  $N \cap \partial M$  et si les composantes de  $N \cap \partial M$  sont de la forme  $I \times S^1 \subset (\partial D^2) \times S^1$  dans le cas où  $N \approx D^2 \times S^1$  et de la forme  $S^1 \times I \times \{q\} \subset S^1 \times S^1 \times \partial I$  dans le cas où  $N \approx S^1 \times S^1 \times I$ .

F. Johansson, W. Jaco et P.B. Shalen ont défini une sous-variété caractéristique  $W$  relative à  $\Sigma$  (cf. [Jo] et [JaS]). Lorsque  $M$  est une variété hyperbolique, c'est une union disjointe de fibrés en intervalles sur des surface compactes, de tores solides et de tores épaissis essentiels. Une telle union disjointe  $W$  de  $I$ -fibrés, de tores solides et de tores épaissis essentiels est une sous-variété caractéristique relative à  $\Sigma$  (on dira aussi sous-variété caractéristique de  $(M, \Sigma)$ ) si elle a les deux propriétés suivantes :

- tout  $I$ -fibré, tore solide ou tore épaissi essentiel dans  $(M, \Sigma)$  peut être homotopé dans  $W$  ;
- aucune composante de  $W$  ne peut être homotopée dans une autre composante de  $W$ .



D'après [Jo] et [JaS], si  $W$  et  $W'$  sont deux telles sous-variétés caractéristiques relatives à  $\Sigma$ , alors il existe un difféomorphisme  $\psi : M \rightarrow M$  isotope à l'identité relativement à  $\partial M - \Sigma$  tel que  $\psi(W) = W'$  et que  $\psi(W \cap \Sigma) = W' \cap \Sigma$ .

Nous allons dans les lignes qui suivent utiliser des arguments de [OtP] pour construire une telle sous-variété caractéristique en utilisant une métrique hyperbolique sur l'intérieur de  $M$ . Pour cela, nous allons nous restreindre au cas où  $\Sigma$  ne contient pas de courbes paraboliques ; dans ce cas une sous-variété caractéristique relative à  $\Sigma$  ne contient pas de tores épaissis.

La discussion de [OtP] que nous allons reprendre ici porte essentiellement sur les adhérences des composantes connexes de la préimage de  $\Sigma$  dans  $\partial\tilde{M}$ . Munissons  $M$  d'une métrique hyperbolique géométriquement finie  $\sigma$  dont toutes les pointes sont des pointes de rang 2, d'une représentation  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  associée à  $\sigma$  et d'un homéomorphisme  $h : M \rightarrow N(\rho)^{ep}$ . Cet homéomorphisme nous permet de considérer  $M$  comme une sous-variété de  $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$ . Chaque composante de  $\partial_{\chi < 0}M$  est munie de la métrique induite par la restriction de  $h$  à  $\partial M$ .

**Lemme 2.1.** *Soit  $\Sigma \subset \partial_{\chi < 0}M$  une surface compacte, connexe, incompressible, ne contenant pas de courbes paraboliques, munie de la métrique induite par  $h$  et  $\tilde{\Sigma}$  son revêtement universel, que l'on complète de la façon habituelle en un disque fermé  $\overline{\tilde{\Sigma}}$  ; alors, chaque composante de la préimage de  $\Sigma$  dans  $\partial\tilde{M}$  est un disque dont la fermeture est homéomorphe à  $\overline{\tilde{\Sigma}}$  de façon équivariante.*

*Démonstration.* Soient  $\tilde{\Sigma}$  une composante de la préimage de  $\Sigma$  dans  $\partial\tilde{M}$  et  $\Gamma$  le stabilisateur de  $\tilde{\Sigma}$  dans  $\rho(\pi_1(M))$  ; on a alors  $\Sigma \approx \tilde{\Sigma}/\Gamma$ . Comme  $\pi_1(\Sigma) \approx \Gamma$  est finiment engendré, d'après Thurston,  $\Gamma$  est géométriquement fini (cf. [MaT]). Si  $\Gamma$  contient un élément parabolique, alors il existe une courbe  $c \subset \Sigma$  qui peut être homotopée dans un tore  $T$  de  $\partial M$ . On a donc un anneau singulier  $a$  reliant  $\Sigma$  à  $T$  (i.e. tel que  $\partial a = \partial^1 a \cup \partial^2 a$ ,  $\partial^1 a \subset \Sigma$  et  $\partial^2 a \subset T$ ). D'après [Wa1], il existe un anneau plongé reliant  $\Sigma$  à  $T$ , donc  $\Sigma$  contient une courbe parabolique, ce qui est contraire à notre hypothèse de départ. Le groupe  $\Gamma$  est donc convexe cocompacte. Comme  $\Sigma$  est incompressible, l'inclusion de  $\Sigma$  dans  $\partial\tilde{M}$  se relève en un homéomorphisme du revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  sur  $\tilde{\Sigma}$ . D'après Otal [Ot1, lemme 1.10] (voir aussi [F1]), comme  $\Gamma$  est convexe cocompact, cet homéomorphisme s'étend en un homéomorphisme équivariant de  $\tilde{\Sigma}$  dans  $\overline{\tilde{\Sigma}} = \tilde{\Sigma} \cup L_\Gamma$ . Comme  $\tilde{\Sigma} \cup L_\Gamma \subset H(\rho)^{ep} \cup L_\rho \approx \overline{\tilde{M}}$ , on a ainsi montré le lemme.  $\square$

**Affirmation 2.2.** *Soient  $\Sigma \subset \partial_{\chi < 0}M$  une surface compacte, connexe, incompressible, ne contenant pas de courbes paraboliques,  $\tilde{\Sigma} \subset \partial\tilde{M}$  une composante connexe de sa préimage et  $\Gamma \subset \rho(\pi_1(M))$  le stabilisateur de  $\tilde{\Sigma}$  ; alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il n'y a qu'un nombre fini de translats de l'ensemble limite  $L_\Gamma$  dont le diamètre pour la distance sphérique de  $\partial\overline{\mathbb{H}^3}$  est supérieur à  $\varepsilon$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une infinité de translats  $g_n(L_\Gamma)$  de diamètre supérieur à  $\varepsilon$  ; les enveloppes convexes dans  $\mathbb{H}^3$  de ces translats intersectent un même compact de  $\mathbb{H}^3$ . On en déduit une infinité de translats d'un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur l'enveloppe convexe  $H(L_\Gamma)$  qui intersectent un même compact. Comme  $\Gamma$  est convexe cocompacte, ce domaine fondamental peut être choisi compact ce qui contredit le fait que  $\rho(\pi_1(M))$  agit proprement discontinuement sur  $\mathbb{H}^3$ .  $\square$

**Affirmation 2.3.** *Soient  $\Sigma$  et  $\Sigma' \subset \partial_{\chi < 0}M$  deux surfaces disjointes, compactes, connexes, incompressibles, ne contenant pas de courbes paraboliques,  $\tilde{\Sigma} \subset \partial\tilde{M}$  (resp.  $\tilde{\Sigma}'$ ) une composante de la préimage de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma'$ ) et  $\Gamma \subset \rho(\pi_1(M))$  (resp.  $\Gamma'$ ) le stabilisateur de  $\tilde{\Sigma}$  (resp.  $\tilde{\Sigma}'$ ) ; alors si  $L_\Gamma \cap L_{\Gamma'}$  n'est pas vide, il contient au moins deux points.*

*Démonstration.* Soient  $\xi \subset L_\Gamma \cap L_{\Gamma'}$  et  $l^+$  une demi-géodésique de  $\mathbb{H}^3$  qui est asymptote à  $\xi$ ; notons  $o$  l'origine de  $\mathbb{H}^3$ . Comme  $\Gamma$  est convexe cocompact, il existe une suite non constante d'éléments  $g_n \in \Gamma$  et une constante  $K$  telles que, pour tout point  $x$  de  $l^+$ ,  $\exists n$  avec  $d(x, g_n(O)) \leq K$ . On a de même une constante  $K'$  et une suite  $g'_n \subset \Gamma'$ , d'où  $d(g_n(O), g'_n(O)) \leq K + K'$ . Comme  $\rho$  est fidèle et discrète ceci entraîne que, quitte à extraire une sous-suite,  $\exists g \in \rho(\pi_1(M))$  telle que  $\forall n, g'_n g_n^{-1} = g$ . De cette égalité on déduit que  $g'_n g_n^{-1} g_{n+1} g_{n+1}^{-1} = Id$ , d'où  $g_n^{-1} g_{n+1} = g_n^{-1} g'_n g_{n+1}$  ce qui permet de conclure que  $L_\Gamma \cap L_{\Gamma'}$  contient les deux points fixes de  $g_n^{-1} g_{n+1}$ .  $\square$

**Proposition 2.** *Soient  $\Sigma$  et  $\Sigma' \subset \partial_{\chi < 0} M$  deux surfaces disjointes ou confondues, compactes, connexes, incompressibles, ne contenant pas de courbes paraboliques,  $\tilde{\Sigma} \subset \partial \tilde{M}$  (resp.  $\tilde{\Sigma}'$ ) une composante de la préimage de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma'$ ) et  $\Gamma \subset \rho(\pi_1(M))$  (resp.  $\Gamma'$ ) le stabilisateur de  $\tilde{\Sigma}$  (resp.  $\Gamma'$ ).*

*Alors  $\overline{\tilde{\Sigma}} \cap \overline{\tilde{\Sigma}'}$  est ou bien vide, ou bien égal à l'ensemble limite de  $\Gamma \cap \Gamma'$ .*

*Dans ce dernier cas, si  $\Gamma \cap \Gamma'$  n'est pas cyclique, c'est le groupe fondamental d'une composante  $I$ -fibrée  $W_i$  d'une sous-variété caractéristique de  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$  et si  $\Gamma \cap \Gamma'$  est cyclique, c'est un sous-groupe d'indice fini du groupe fondamental d'un tore solide  $W_k$  qui est une composante d'une sous-variété caractéristique de  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$ .*

*Démonstration.* Soit  $F = \overline{\tilde{\Sigma}} \cap \overline{\tilde{\Sigma}'} = L_\Gamma \cap L_{\Gamma'}$ ; comme les points fixes de tout élément de  $\Gamma \cap \Gamma'$  autre que l'identité sont contenus dans  $F$ , alors  $L_{\Gamma \cap \Gamma'} \subset F$ . Notons  $\tilde{C}$  l'enveloppe convexe de  $F$  dans  $\tilde{\Sigma} \subset \partial \tilde{M}$  munie de la métrique induite.

**Affirmation 2.4.** *L'image par  $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  de chaque géodésique de la frontière de  $\tilde{C}$  (ou de la géodésique  $\tilde{C}$  si  $F$  contient seulement deux points) est une géodésique simple compacte.*

*Démonstration.* Soit  $g \subset \Gamma$ ; comme  $g(\tilde{\Sigma}')$  et  $\tilde{\Sigma}'$  sont confondues ou disjointes, alors  $\tilde{C}$  et  $g(\tilde{C})$  coïncident ou sont disjoints. La projection  $l = p(\tilde{l})$  de chaque composante  $\tilde{l}$  de  $\partial \tilde{C}$  est donc une géodésique simple. Si  $l$  n'est pas compacte, une infinité de translats de  $\tilde{l}$  intersectent un même compact de  $\tilde{\Sigma}$  et les bouts de ses translats sont contenus dans des translats différents de  $L_{\Gamma'}$ . On a alors une infinité de translats de  $L_{\Gamma'}$  dont le diamètre est minoré, ce qui contredit l'affirmation 2.2.  $\square$

Si le cardinal de  $F$  est deux, la projection de  $\tilde{C}$  est une géodésique simple compacte et  $\tilde{C}$  est stabilisé par un élément  $g \subset \Gamma$  indivisible dans  $\Gamma$ . Si pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $g^n$  ne stabilisait pas  $\tilde{\Sigma}'$ , il y aurait une infinité de translats de  $L_{\Gamma'}$  contenant  $F$ , ce qui contredirait l'affirmation 2.2. On en déduit qu'il existe  $n$  tel que  $g^n \in \Gamma \cap \Gamma'$  et que  $g^n$  stabilise  $\tilde{C}'$ . Notons  $g$  un élément indivisible de  $\rho(\pi_1(M))$  tel que  $g = g^n$ , il existe alors  $q \leq np$  tel que  $g^q$  est un élément indivisible de  $\Gamma'$  qui stabilise  $\tilde{C}'$ . Notons  $\tilde{c}^*$  l'axe de  $g$  et  $c^* \subset M$  sa projection; la géodésique  $C$  est librement homotope à  $pc^*$  et  $C'$  est librement homotope à  $qc^*$ . L'affirmation suivante va nous permettre de conclure que  $p = q$  et que  $C \cup C'$  borde un anneau essentiel.

**Remarque.** Sous les hypothèses de la proposition 2, il est possible que  $C = C'$ . Dans ce cas, on choisit un voisinage annulaire  $\mathcal{V} \subset \partial M$  de  $C$  et on remplace  $C$  par une composante de  $\partial \mathcal{V}$  et  $C'$  par l'autre composante de  $\partial \mathcal{V}$  (comme  $M$  est orientable,  $\partial \mathcal{V}$  a deux composantes connexes).

**Affirmation 2.5.** *Soient  $c$  et  $c' \subset \partial M$  deux géodésiques simples compactes disjointes et  $p$  et  $q$  deux entiers tels qu'il existe une géodésique simple  $c \subset M$  telle que  $c$  est librement homotope à  $pc$  et que  $c'$  est librement homotope à  $qc$ . Alors  $p = q$  et  $c \cup c'$  borde un anneau essentiel.*

*Démonstration.* Soient  $\tilde{c} \subset \partial \tilde{M}$  un relevé de  $c$  et  $g \in \rho(\pi_1(M))$  un générateur du sous-groupe qui laisse  $\tilde{c}$  invariant; d'après les hypothèses de l'affirmation, il existe des relevés  $\tilde{c}$  de  $c$  et  $\tilde{c}'$  de  $c'$  invariant par  $g^{pq}$ . La famille  $\{\tilde{c}, \rho_n(g)(\tilde{c}), \dots, \rho_n(g^{p-1})(\tilde{c})\}$  découpe  $\partial \mathbb{H}^3 \approx S^2$  en  $p$  croissants  $Z_1, \dots, Z_p$ . Comme  $c'$  n'intersecte pas  $c$ , pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\rho_n(g^i)(\tilde{c}')$  est contenu dans l'un des  $Z_j$ . De plus  $Z_j = \rho_n(g)(Z_{j-1})$ , donc le nombre de translatés de  $\tilde{c}'$  qui sont contenus dans  $Z_j$  ne dépend pas de  $j$ . Comme  $q$  est le nombre de translatés de  $\tilde{c}'$  qui ont les mêmes bouts que  $\tilde{c}$ , on en déduit que  $p$  divise  $q$ . En échangeant les rôles de  $\tilde{c}$  et de  $\tilde{c}'$ , on obtient que  $q$  divise  $p$ . Ainsi on a  $q = p$  et  $c$  et  $c'$  sont donc librement homotopes. D'après [ShW] ceci entraîne que  $c \cup c'$  borde un anneau essentiel.  $\square$

Si le cardinal de  $F$  est strictement supérieur à deux, la surface  $C = p(\tilde{C})$  est une sous-surface de  $\Sigma$  bordée par des géodésiques simples compactes. Notons  $\Gamma_1 \approx \pi_1(C)$  le stabilisateur dans  $\Gamma$  de  $\tilde{C}$ ;  $\Gamma_1$  est le stabilisateur de  $F$  dans  $\Gamma$  donc  $\Gamma \cap \Gamma' \subset \Gamma_1$ . Comme  $F$  contient au moins trois points et que  $\Gamma_1$  stabilise  $F \subset \partial \tilde{\Sigma}'$ ,  $\Gamma_1$  stabilise aussi  $\tilde{\Sigma}'$  et  $\Gamma_1 \subset \Gamma \cap \Gamma'$ . On a ainsi  $\Gamma_1 = \Gamma \cap \Gamma'$  et si  $\tilde{C}'$  est l'enveloppe convexe de  $F$  dans  $\tilde{\Sigma}'$ , alors  $C' = p(\tilde{C}')$  est homotope à  $C$ . Comme  $C \subset \Sigma$  est incompressible, d'après [Wa3],  $C \cup C'$  borde un  $I$ -fibré,  $C \times I$ , essentiel de  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$ .

Si le cardinal de  $F$  est égal à deux, notons  $\tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2, \dots, \tilde{\Sigma}_N$  les translatés de  $\tilde{\Sigma}$  et  $\tilde{\Sigma}'$  dont les adhérences intersectent  $\tilde{\Sigma}$  exactement en  $F$ ; ces translatés sont en nombre fini d'après l'affirmation 2.2 et nous allons supposer que  $N \geq 1$ . Notons  $\tilde{c}_j$  la géodésique de  $\tilde{\Sigma}_j$  qui joint  $\tilde{x}$  à  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{c}^*$  la géodésique de  $\mathbb{H}^3$  qui joint  $\tilde{x}$  à  $\tilde{y}$ ,  $c^*$  la projection de  $\tilde{c}^*$  dans  $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$  et  $c_j$  les projections de  $\tilde{c}_j$  sur  $\partial N(\rho)$ ,  $1 \leq i \leq N$ . D'après l'affirmation 2.5 il existe  $p$  tel que toutes les courbes  $c_j$  sont homotopes à  $pc^*$ . Pour chaque point  $z$  de  $c_j$ , considérons le segments géodésique qui joint  $z$  à sa projection orthogonale sur  $c^*$ ; la réunion des ces segments est un anneau  $a_j$  qui est plongé sauf éventuellement en  $c^*$ . Faisons cette construction pour tout  $1 \leq i \leq N$ ; un petit voisinage de  $\bigcup_j a_j$  est un tore solide essentiel dans  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$ .

On fait l'une des deux constructions ci-dessus pour chaque translaté de  $\tilde{\Sigma}$  et  $\tilde{\Sigma}'$  dont l'adhérence intersecte  $\tilde{\Sigma}$ . On obtient ainsi une famille de  $I$ -fibrés essentiels  $W_i$  (remarquons que l'étude des éléments de la forme  $g(\tilde{\Sigma}) \cap \tilde{\Sigma}$  peut produire des fibrés tordus) et de tores essentiels  $W_k$ . Comme les translatés de  $\tilde{\Sigma}$  et  $\tilde{\Sigma}'$  sont disjoints, l'intersection de trois éléments distincts parmi les translatés de  $\tilde{\Sigma}$  et de  $\tilde{\Sigma}'$  contient au plus 2 points. Quitte à les changer par une homotopie, on peut donc supposer ces  $I$ -fibrés et tores essentiels deux à deux disjoints, notons  $W$  leur réunion.

Il nous reste à montrer que  $W$  est une sous-variété caractéristique de  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$ , ceci découle assez facilement de notre construction.

Soit  $V \approx F \times I$  un  $I$ -fibré essentiel dans  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$ ; modifions  $V$  par une homotopie de façon que le bord de la surface  $V \cap \partial M$  soit géodésique. Soit  $\tilde{V} \approx \tilde{F} \times I \subset \tilde{M}$  un relevé de  $V$ ; chaque composante de  $\tilde{F} \times \partial I$  est contenue dans un relevé de  $\Sigma$  ou de  $\Sigma'$ , notons  $\tilde{\Sigma}_1$  et  $\tilde{\Sigma}_2$  ces relevés,  $G_1$  et  $G_2 \subset \rho(\pi_1(M))$  leur stabilisateurs et  $\tilde{C}_1$  et  $\tilde{C}_2$  les enveloppes convexes de  $L_{G_1} \cap L_{G_2}$  dans  $\tilde{\Sigma}_1$  et  $\tilde{\Sigma}_2$ . Comme le bord de  $F \times \partial I$  est géodésique, les composantes de  $\tilde{F} \times \partial I$  sont les enveloppes convexes dans  $\tilde{\Sigma}_1$  et  $\tilde{\Sigma}_2$  du stabilisateur  $\Gamma_{\tilde{F}} \subset \rho(\pi_1(M))$  de  $\tilde{V}$ ; en particulier  $\tilde{F} \times \partial I \subset \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2$ . Par construction  $C_1 \cup C_2$  est isotope au bord d'une composante  $W_i$  de  $W$  et on vient de montrer que  $F \times \partial I$  peut être homotopé dans le bord de  $W_i$ . D'après [Jo], il s'en suit que  $V$  peut être isotopé dans cette composante  $W_i$  de  $W$ .

Comme  $\Sigma \cup \Sigma'$  ne contient pas de courbe parabolique,  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$  ne contient pas de tore épaissi essentiel. Soit  $T$  un tore essentiel dans  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$ ;  $\partial M \cap T$  est une réunion d'anneaux ou de rubans de Möbius  $b_i$  qui sont isotopes sur  $\partial T$ . Identifions  $M$  avec  $N(\rho)^{ep}$  et notons  $c^*$  le géodésique de  $N(\rho)$  qui est homotope à une longitude de  $T$ ; chacun des  $b_i$  est homotope sur  $\partial N(\rho)$  à une géodésique  $c_i$  de  $\partial N(\rho)^{ep}$ . Notons  $a_i$  l'anneau obtenu en joignant chaque point de  $c_i$  à sa projection orthogonale sur  $c^*$ . Le tore  $T$  est homotope à  $\bigcup_i a_i$  et par construction des tores essentiels de  $W$ ,  $\bigcup_i a_i$  peut être homotopé dans un tel tore essentiel.

Montrons enfin qu'aucune composante de  $W$  ne peut être isotopée dans une autre composante de  $W$ . Soient  $W_1$  et  $W_2$  deux composantes de  $W$  et  $\tilde{W}_1$  et  $\tilde{W}_2 \subset \tilde{M}$  des relevés de  $W_1$  et  $W_2$ ;  $\partial \tilde{W}_1 \cap \partial \tilde{M}$  est contenu dans des relevés  $\tilde{\Sigma}_1, \dots, \tilde{\Sigma}_p$  ( $p = 2$  si  $W_1$  est un  $I$ -fibré essentiel) de  $\Sigma$  ou  $\Sigma'$  et  $\partial \tilde{W}_2 \cap \partial \tilde{M}$  est contenu dans des relevés  $\tilde{\Sigma}_{p+1}, \dots, \tilde{\Sigma}'_q$  de  $\Sigma$  ou  $\Sigma'$ . Par construction l'un au moins des  $\tilde{\Sigma}_{p+1}, \dots, \tilde{\Sigma}'_q$  (considérons que c'est  $\tilde{\Sigma}'_q$ ) n'appartient pas à la famille  $\tilde{\Sigma}_1, \dots, \tilde{\Sigma}_p$ . Également par construction, il existe un anneau  $E \subset W_2$  essentiel dans  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$  tel qu'un relevé  $\tilde{E}$  de  $E$  possède une composante de bord contenue dans  $\tilde{\Sigma}'_q$ . Comme  $\tilde{\Sigma}'_q$  n'est pas un élément de  $\{\tilde{\Sigma}_1, \dots, \tilde{\Sigma}_p\}$ ,  $\tilde{E}$  ne peut pas être isotopé dans  $\tilde{W}_1$ , donc  $\tilde{W}_2$  ne peut pas être isotopé dans  $\tilde{W}_1$ . En appliquant ce raisonnement à tous les relevés de  $W_1$  et de  $W_2$  on montre que  $W_2$  ne peut pas être isotopé dans  $W_1$ . On a ainsi montré qu'aucune composante de  $W$  ne peut être isotopée dans une autre composante de  $W$  ce qui conclut la preuve de la proposition 2. □

**Remarque.** Si  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  sont incompressibles et que toutes les courbes paraboliques de  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  sont des courbes  $c^1, \dots, c^p$  de  $\partial \Sigma^1 \cup \partial \Sigma^2$ ; alors en considérant une métrique géométriquement finie sur l'intérieur de  $M$ , qui a une pointe de rang 1 pour chaque  $c^j$ , on peut faire la même construction (cf. [Otp]).

## 2.4 Surface embrassée par une lamination géodésique

Nous allons associer à une lamination géodésique connexe une surface qu'elle remplit et que nous appellerons surface embrassée par cette lamination. L'existence d'une telle surface est une propriété connue des laminations géodésiques.

Dans toute cette section,  $\lambda$  est une lamination géodésique connexe sur une surface  $S$  munie d'une métrique hyperbolique d'aire finie. Nous supposons également que  $\lambda$  n'est pas une courbe simple.

**Affirmation 2.6.** *Il existe une unique surface compacte  $\bar{S}(\lambda)$  à bord géodésique telle que toute surface compacte à bord géodésique contenant  $\lambda$  contient  $\bar{S}(\lambda)$ .*

*Démonstration.* Soit  $F$  une sous-surface de  $S$ , on appellera *multi-courbe séparante* de  $F$ , une multi-courbe  $\gamma$  telle que  $F - \gamma$  n'est pas connexe.

Soit  $S_1$  une surface à bord géodésique contenant  $\lambda$ . Si  $S_1$  ne contient pas de multi-courbe séparante disjointe de  $\lambda$ , posons  $\bar{S}(\lambda) = S_1$ ; sinon en découpant  $S_1$  suivant une telle multi-courbe, on obtient une surface  $S_2 \subsetneq S_1$  à bord géodésique contenant  $\lambda$ . Si  $S_2$  ne contient pas de multi-courbe séparante disjointe de  $\lambda$ , on pose  $\bar{S}(\lambda) = S_2$ , sinon, on construit  $S_3$  telle que  $\lambda \subset S_3 \subsetneq S_2$ . Comme une multi-courbe de  $S$ , contient au plus  $3g(S) - 3$  éléments, après un nombre fini d'itérations, on obtient une surface  $S_j = \bar{S}(\lambda)$  à bord géodésique, contenant  $\lambda$  et ne contenant pas de multi-courbe séparante disjointe de  $\lambda$ . Il nous reste à montrer que  $\bar{S}(\lambda)$  ainsi définie a la propriété cherchée, ceci entraînera, en outre, que  $\bar{S}(\lambda)$  est indépendante de la suite finie  $S_1, S_2, \dots, S_j$  choisie. Soit  $F$  une surface à bord géodésique contenant  $\lambda$ .

Homotopons  $F \cap \bar{S}(\lambda)$  en une surface  $S'$  à bord géodésique. On a alors  $\lambda \subset S' \subset F \cap \bar{S}(\lambda)$ . Si  $S' \subsetneq \bar{S}(\lambda)$ , alors  $\partial S' \subset \bar{S}(\lambda)$  est une multi-courbe séparante disjointe de  $\lambda$ , ce qui est impossible par construction. On a donc  $\bar{S}(\lambda) = S' \subset F$ .  $\square$

**Remarque.** D'après cette définition,  $\bar{S}(\lambda)$  dépend de la métrique hyperbolique géométriquement finie de  $S$ . Cependant, si l'on change cette métrique,  $\bar{S}(\lambda)$  est seulement modifiée par une isotopie de  $S$ .

**Affirmation 2.7.** *Il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques fermées simples dans  $\bar{S}(\lambda)$  qui sont disjointes de  $\lambda$ . De plus, ces géodésiques sont deux à deux disjointes et non séparantes.*

*Démonstration.* D'après la démonstration de l'affirmation précédente, toute géodésique fermée simple de  $\bar{S}(\lambda)$  disjointe de  $\lambda$  est non séparante.

Nous allons montrer que deux géodésiques de  $\bar{S}(\lambda)$  disjointes de  $\lambda$  ne peuvent pas s'intersecter. Comme  $\bar{S}(\lambda)$  ne peut contenir plus de  $3g(\bar{S}(\lambda)) - 3$  géodésiques disjointes, ceci permettra de conclure. Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux géodésiques périodiques de  $\bar{S}(\lambda)$  disjointes de  $\lambda$ .

- Si  $\#(\alpha_1 \cap \alpha_2) = 1$ , alors  $\alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1}$  est une courbe simple disjointe de  $\alpha_1$  qui borde un tore percé disjoint de  $\lambda$  et contenu dans  $\bar{S}(\lambda)$ . Ceci contredit la minimalité de  $\bar{S}(\lambda)$ .

- Si  $\#(\alpha_1 \cap \alpha_2) \geq 2$ ,  $\alpha_2$  contient un arc  $k$ , tel que  $k \cap \alpha_1 = \partial k$ . Par chirurgie de  $\alpha_1$  le long de  $k$ , on obtient deux géodésiques  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  (éventuellement confondues) telles que  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  bordent un pantalon de  $\bar{S}(\lambda)$  disjoint de  $\lambda$ . Ceci contredit à nouveau la minimalité de  $\bar{S}(\lambda)$ .  $\square$

On appellera *bord effectif* de  $\bar{S}(\lambda)$  et on notera  $\partial \bar{S}(\lambda)$  la réunion du bord topologique de  $\bar{S}(\lambda)$  et de ces courbes. On appellera *surface embrassée par la lamination*  $\lambda$  et on notera  $S(\lambda)$  la surface obtenue en enlevant à  $\bar{S}(\lambda)$  un voisinage annulaire de  $\partial \bar{S}(\lambda)$ . Cette construction fournit l'affirmation suivante :

**Affirmation 2.8.** *Soit  $c \subset S(\lambda)$  une géodésique simple; alors ou bien  $c$  intersecte transversalement  $\lambda$ , ou bien  $c \subset \lambda$ .*

**Remarque.** En utilisant les arguments de la preuve du lemme 2.7, on note que toute géodésique simple qui intersecte transversalement  $\partial \bar{S}(\lambda)$  ou bien intersecte transversalement  $\lambda$ , ou bien spirale sur un minimal de  $\lambda$ .

### 3 Quelques propriétés de $\mathcal{P}(M)$

Montrons tout d'abord quelques propriétés vérifiées par une lamination qui satisfait la condition  $c$ ) et intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques de  $\partial M$  (donc à fortiori par une lamination qui vérifie les conditions  $c$ ) et  $b$ ), ou  $b_1$ ), ou  $b_2$ )).

**Lemme 3.1.** *Soit  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$  une lamination géodésique mesurée satisfaisant la condition  $c$ ),  $S \subset \partial M$  une surface compacte compressible dont le bord n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement. Alors il existe un système admissible de méridiens  $\mu \subset S$  vers lequel  $S$  ne contient pas d'arc de compression disjoint de  $\lambda$ .*

*Démonstration.* D'après la condition  $c$ ), comme  $\partial S$  n'intersecte pas  $\lambda$ ,  $\partial S$  ne contient pas de méridiens. Soit  $\mu$  un système admissible de méridiens de  $S$ . Si  $S$  contient un arc de compression  $k$  vers un méridien  $\mu_0 \subset \mu$  avec  $k$  disjoint de  $\lambda$ , alors, par chirurgie le long de

cet arc, on obtient deux méridiens  $\mu_1$  et  $\mu_2$  tels que le système  $\mu'$  obtenu en remplaçant  $\mu_0$  par  $\mu_1$  ou  $\mu_2$  (considérons que c'est  $\mu_1$ ) est un système admissible (cf. appendice B.1). On a alors  $i(\lambda, \mu_1) + i(\lambda, \mu_2) \leq i(\lambda, \mu_0)$  donc  $i(\lambda, \mu') \leq i(\lambda, \mu) - i(\lambda, \mu_2) \leq i(\lambda, \mu) - 2\pi$ . En itérant cette opération un nombre fini de fois, on obtient un système admissible de méridiens vers lequel  $S$  ne contient pas d'arc de compression disjoint de  $\lambda$ .  $\square$

Si  $\alpha$  est une lamination qui n'intersecte pas transversalement  $\lambda$ , nous verrons par la suite (lemme 3.3) que cette propriété permet de définir les bouts des relevés des feuilles de  $\lambda$ . Dans l'immédiat, nous allons décrire une manière d'étendre ce système admissible pour obtenir une multi-courbe par rapport à laquelle  $\alpha$  est en position prétendue.

**Lemme 3.2.** *Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui satisfait la condition c) et intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques de  $\partial M$  et  $\alpha$  une lamination géodésique qui n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement; alors il existe une multi-courbe  $\gamma \subset S(\alpha)$  par rapport à laquelle  $\alpha$  est en position prétendue.*

*De plus, si  $S(\alpha)$  est compressible (respectivement contient une courbe parabolique), alors  $\gamma$  contient un système  $\mu$  de méridiens admissible pour  $(M, S(\alpha))$  (respectivement contient une courbe parabolique).*

*Démonstration.* Comme  $\lambda$  n'intersecte pas  $\alpha$  transversalement,  $\lambda \cap S(\alpha) \subset \alpha$ .

Si  $S(\alpha)$  est incompressible, notons  $\gamma \subset S(\alpha)$  une multi-courbe telle que chaque feuille de  $\alpha$  intersecte transversalement au moins une feuille de  $\gamma$ ; comme  $S(\alpha)$  est incompressible,  $\gamma$  est en position prétendue par rapport à  $\alpha$ . Si  $S(\alpha)$  contient une courbe parabolique  $c$ , par hypothèse  $\lambda$  intersecte  $c$  transversalement donc  $\alpha$  intersecte  $c$  transversalement et on peut choisir  $\gamma$  de façon que  $c \subset \gamma$ .

Si  $S(\alpha)$  est compressible, considérons un système de méridiens  $\mu$  admissible pour  $(M, S(\alpha))$  fourni par le lemme 3.1. Soit  $\alpha^1$  un minimal de  $\alpha$  qui n'intersecte pas  $\mu$ ; notons  $S'$  la surface obtenue en ajoutant à la composante de  $S(\alpha) - \mu$  qui contient  $\alpha^1$  un disque le long de chaque composante de  $\mu$ . Notons  $\delta'$  la multi-courbe réunion des feuilles fermées de  $\alpha$  contenues dans  $S'$  et des bords effectifs des surfaces embrassées par les minimaux exceptionnels de  $\alpha$  contenus dans  $S'$ . Comme  $\delta'$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement, d'après la condition c), ses feuilles sont incompressibles. Chaque feuille de  $\delta'$  correspond donc à un élément non nul de  $\pi_1(S')$  ce qui entraîne que  $S'$  n'est pas une sphère. Ceci entraîne aussi l'existence d'une multi-courbe  $\nu \subset S' \cap \partial M$  telle que chaque composante de  $\delta'$  intersecte au moins une composante de  $\nu$  de façon essentielle (c'est-à-dire que si  $\check{S}'$  est le revêtement universel de  $S'$ , la préimage de  $\nu$  sépare les deux bouts de chaque composante  $\check{\delta}'^j$  de la préimage de  $\delta'$ ). Si  $S'$  contient un arc de compression disjoint de  $\lambda$  vers une composante  $\nu^1$  de  $\nu$ , par chirurgie le long de cet arc, on obtient un disque essentiel  $D$  et une géodésique  $\nu^{1'}$  tels que  $i(\partial\nu^{1'}, \lambda) \leq i(\partial\nu^1, \lambda) - i(\partial D, \lambda) \leq i(\partial\nu^1, \lambda) - 2\pi$ . En itérant cette opération un nombre fini de fois, on obtient une nouvelle famille de courbes  $\nu'$  vers laquelle  $S$  ne contient pas d'arcs de compression disjoint de  $\lambda$ . Comme chaque composante  $\nu^{j'}$  de  $\nu'$  est obtenue à partir d'une composante  $\nu^j$  de  $\nu$  par chirurgie le long d'arcs de compression,  $\nu^{j'}$  est librement homotope à  $\nu^j$  sur  $S'$ , donc chaque composante de  $\delta'$  intersecte transversalement une composante de  $\nu'$ . En opérant ainsi pour chaque composante de  $\partial M - \mu$ , on obtient une multi-courbe  $\gamma = \mu \cup \nu'$  par rapport à laquelle  $\alpha$  est en position prétendue.  $\square$

**Remarque.** Si  $M$  est un bretzel et si  $S(\alpha) = \partial M$ , alors la variété obtenue en découpant  $M$  le long de disques bordés par les composantes du système admissible de méridiens  $\mu$  produit par le lemme 3.1 est une boule. Par conséquent si un minimal  $\alpha^1$  de  $\alpha$  n'intersecte

pas  $\mu$  transversalement, alors les composantes de  $\partial S(\alpha^1)$  sont des méridiens. On a alors une contradiction entre le fait que  $\lambda$  n'intersecte pas  $\alpha$  transversalement et la condition  $c$ ). On en déduit que  $\alpha$  est en position prétendue par rapport à  $\mu$  (on peut donc choisir  $\gamma = \mu$  dans ce cas-là).

**Lemme 3.3.** *Soient  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui satisfait la condition  $c$ ) et intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques de  $\partial M$  et  $l$  une géodésique simple qui n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement; alors chaque relevé de  $l$  à  $\partial \tilde{M}$  a deux bouts bien définis et distincts dans  $\partial \tilde{M}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\bar{l}$  l'adhérence de  $l$  dans  $\partial M$ ; c'est une lamination géodésique qui contient un ou deux minimaux que nous noterons  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  (avec éventuellement  $\alpha_+ = \alpha_-$ ). Comme  $l$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement,  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  n'intersectent pas  $\lambda$  transversalement non plus. On a donc  $i(\partial' \bar{S}(\bar{l}), \lambda) = 0 = i(\partial' \bar{S}(\alpha_+), \lambda) = i(\partial' \bar{S}(\alpha_-), \lambda)$ .

Si  $S(\bar{l})$  est incompressible et ne contient pas de courbes paraboliques, l'affirmation 3.3 est une conséquence du lemme 2.1.

Sinon  $S(\bar{l})$  contient un méridien ou une courbe parabolique et l'affirmation suivante va nous permettre d'exploiter le lemme 3.1

**Affirmation 3.4.** *Soit  $\alpha \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  une lamination géodésique minimale,  $l$  une feuille de  $\alpha$  et  $\mu$  une géodésique fermée simple qui est un méridien ou une courbe parabolique et par rapport à laquelle  $\alpha$  est en position prétendue; alors les relevés de  $l$  à  $\partial \tilde{M}$  ont deux bouts bien définis dans  $\tilde{M}$ . De plus, si  $\mu$  est un méridien, ou si  $\mu \cup \alpha$  est contenue dans une surface incompressible, alors ces deux bouts sont distincts.*

*Démonstration.* Comme  $\alpha$  est en position prétendue par rapport à  $\mu$ , alors  $l$  intersecte  $\mu$ . Soit  $\tilde{l}$  un relevé de  $l$ , il intersecte au plus une fois chaque relevé de  $\mu$ . Considérons l'ensemble  $(\tilde{\mu}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  des relevés de  $\mu$  qui intersectent  $\tilde{l}$ , indexé par l'ordre le long de  $\tilde{l}$ . Notons  $\bar{\mu}_i$  l'adhérence de  $\tilde{\mu}_i$  dans  $\partial \tilde{M} \approx S^2$ ; pour  $i$  positif (respectivement négatif), chaque courbe  $\bar{\mu}_i$  est une courbe de Jordan et borde un fermé  $F_i$  de  $\partial \tilde{M}$  tel que les fermés  $F_i$  vérifient :

- pour  $|i| > |j|$  et  $ij > 0$ ,  $F_i \subsetneq F_j$ ;
- le diamètre des  $F_{|i|}$ , pour la distance sphérique, tend vers 0 lorsque  $|i|$  tend vers  $+\infty$ ;
- $\sharp(F_i \cap F_j) \leq 1$  pour  $j < 0 < i$ .

Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , la feuille  $\tilde{l}$  coupe exactement une fois  $\partial F_i$ ,  $\tilde{l}$  a donc deux bouts bien définis dans l'ensemble limite  $L_\rho = \partial \tilde{M} - \partial \tilde{M}$ .

Si  $\mu$  borde un méridien,  $F_i \cap F_j = \emptyset$  pour  $j < 0 < i$ , donc ces deux bouts sont distincts.

Considérons enfin le cas où  $\mu$  est une courbe parabolique et où il existe une surface incompressible  $\Sigma \subset \partial M$  qui contient  $\mu \cup \alpha$ . Supposons qu'il existe  $j < 0 < i$  tels que  $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ ; d'après la construction des  $F_j$ , on a alors  $\partial F_j \cap \partial F_{j+1} \neq \emptyset$ . Soit  $\tilde{k}$  le segment de  $\tilde{l}$  qui joint  $\mu_j$  à  $\mu_{j+1}$  et  $c$  la courbe simple union de la projection  $k$  de  $\tilde{k}$  sur  $\partial M$  et d'un segment de  $\mu$  joignant les extrémités de  $k$ . Les éléments de  $\rho(\pi_1(M))$  correspondant à  $\mu$  et à  $c$  sont des isométries paraboliques qui fixent  $\partial F_j \cap \partial F_{j+1}$  et donc commutent. Comme  $\Sigma$  est incompressible, ceci entraîne que  $\pi_1(S(\alpha))$  contient un groupe abélien de rang 2, ce qui est impossible. On en déduit que pour  $j < 0 < i$ ,  $F_i \cap F_j = \emptyset$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Déduisons en tout d'abord que tout relevé d'une feuille de  $\alpha_+$  (ou de  $\alpha_-$ ) a deux bouts bien définis dans  $\partial \tilde{M}$ . Si  $S(\alpha_+)$  est compressible ou contient une courbe parabolique, d'après le lemme 3.2,  $S(\alpha^+)$  contient un méridien ou une courbe parabolique par rapport auquel  $\alpha^+$

est en position prétendue. Dans les deux cas, l'affirmation 3.4 entraîne que tout relevé d'une feuille de  $\alpha_+$  a deux bouts bien définis dans  $\partial\tilde{M}$ . Il en est de même si  $S(\alpha_+)$  est incompressible d'après l'affirmation 2.1. On en déduit que tout relevé de  $l$  a deux bouts bien définis dans  $\partial\tilde{M}$ .

Montrons ensuite que ces deux bouts sont distincts. Si  $S(\bar{l})$  est compressible, notons  $\mu \subset S(\bar{l})$  un méridien vers lequel  $\bar{l}$  ne contient pas d'arc de compression (l'existence de  $\mu$  est assurée par le lemme 3.1) et si  $S(\bar{l})$  est incompressible mais contient une courbe parabolique, notons  $\mu \subset S(\bar{l})$  une courbe parabolique. Notons  $\tilde{l}$  et  $\tilde{\mu}$  des relevés de  $l$  et  $\mu$  qui s'intersectent. D'après l'affirmation 3.4, l'adhérence de  $\tilde{\mu}$  dans  $\partial\tilde{M}$  sépare les deux bouts de  $\tilde{l}$ .  $\square$

Dans la preuve du théorème 1, nous n'utiliserons pas directement les conditions b) et c). Nous allons maintenant les formuler différemment. Pour simplifier l'exposé de la preuve du théorème 1, les démonstrations des résultats qui suivent ont été reportées en annexe.

**Proposition 3.** *Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée vérifiant les conditions a) et c); alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- b) *l'intersection des adhérences dans  $\tilde{B}$  de deux composantes connexes du complémentaire de  $p^{-1}(\lambda)$  dans  $\partial\tilde{M}$  est soit vide, soit l'adhérence d'une feuille  $\tilde{l} \subset p^{-1}(\lambda)$  dont la projection sur  $\partial M$  est une feuille fermée  $l$ ;*
- $b_1$ ) *La lamination géodésique  $\lambda$  est anannulaire;*
- $b_2$ )  *$\exists \eta > 0$  tel que, pour tout anneau essentiel  $a$ ,  $i(\partial a, \lambda) \geq \eta$ .*

*Démonstration.* Voir lemmes C.1 et C.3.  $\square$

**Remarque.** Avec ces nouvelles conditions, on peut plus facilement rapprocher le théorème 1 des résultats de [BoO] : si  $M$  est une variété à bord incompressible, les conditions a),  $b_1$ ) (en y ajoutant les rubans de Möbius essentiels si la variété n'est pas orientable) et  $b_2$ ) sont équivalentes aux conditions 1, 2 et 2' de [BoO] et la condition c) est vide.

Avant de montrer que ces conditions sont vérifiées par une lamination de plissage, nous allons donner une dernière propriété des laminations géodésiques de  $\mathcal{P}(M)$  qui nous sera utile par la suite. Si  $\lambda$  est une lamination géodésique mesurée et  $l$  une géodésique simple non fermée, on définit le nombre d'intersection  $i(l, \lambda)$  comme la limite des nombres d'intersection  $i(\lambda, k_n)$  où  $k_n$  est une suite de segments emboîtés qui tendent vers  $l$ . Ce nombre d'intersection peut être infini et il est indépendant de la suite  $(k_n)$  choisie.

**Lemme 3.5.** *Si  $\lambda$  est une lamination géodésique mesurée qui satisfait aux conditions  $b_1$ ) et c), alors elle a la propriété suivante :*

- $c_1$ ) *toute feuille homoclinique  $l$  qui est contenue dans une limite géométrique de courbes simples vérifie  $i(l, \lambda) > 2\pi$ .*

*Démonstration.* Voir annexe C.  $\square$

### 3.1 Conditions nécessaires

Pour montrer que les conditions a), b),  $b_1$ ),  $b_2$ ) et c) sont nécessaires, nous allons prouver qu'une lamination mesurée de plissage vérifie les conditions a),  $b_1$ ) et c), ce qui, d'après la proposition 3, permet de conclure.

**Proposition 4.** *Soit  $\lambda$  la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie non fuchsienne  $\sigma$  sur l'intérieur d'une variété hyperbolique compacte de dimension 3; alors  $\lambda$  vérifie les conditions suivantes :*



- a) toute feuille fermée de  $\lambda$  a un poids inférieur ou égal à  $\pi$  ;
- b<sub>1</sub>) La lamination géodésique  $\lambda$  est anannulaire ;
- c)  $i(\lambda, \partial D) > 2\pi$  pour tout disque essentiel  $D$ .

*Démonstration.* La condition a) vient de la définition de la mesure de plissage.

Comme dans [BoO], la condition c) vient de la formule de Gauss-Bonnet appliquée à un disque essentiel simplicial. Soient  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  une représentation associée à  $\sigma$  et  $H(\rho)$  l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{H}^3$  de l'ensemble limite  $L_\rho$ . Soit  $(H^j)$  une famille finie de demi-espaces contenant  $\partial H(\rho)$  telle que la frontière de chacun des  $H^j$  contient soit une composante de  $\partial H(\rho) - p^{-1}(\lambda)$ , soit un relevé d'une feuille non-isolée de  $\lambda$ . Notons  $C$  le convexe  $\bigcap_j H^j$ ,  $\partial C$  est appelé un *toit polyédral* de  $\partial H(\rho)$ . D'après [EpM],  $\partial H(\rho)$  est la limite d'une suite  $(\partial C_n)$  de toits polyédraux, au sens où tout compact de  $\partial H(\rho)$  est la limite pour la topologie de Hausdorff d'une suite de compacts de  $\partial C_n$ . Soit  $D \subset M$  un disque essentiel et  $\partial D$  le méridien qui le borde ; notons  $\tilde{D} \subset \tilde{M}$  un relevé de  $D$ . Comme  $\tilde{M} \approx H(\rho)^{ep}$ , on peut considérer que  $\tilde{D} \subset H(\rho)$  (si  $\partial D$  intersecte une feuille de poids  $\pi$  de  $\lambda$ ,  $\tilde{D} \subset H(\rho)$  est un disque idéal, c'est-à-dire qu'il a une pointe correspondant à ce point d'intersection). Soient  $\mathcal{V} \subset \mathbb{H}^3$  un voisinage de  $\partial \tilde{D}$  et  $(\partial C_n)$  une suite de toits polyédraux de  $H(\rho)$  qui converge vers  $H(\rho)$  et tels que  $\mathcal{V}$  ne contient aucun des sommets des  $\partial C_n$ . Soit  $\tilde{c}_n \subset \partial C_n \cap \mathcal{V}$  une suite de courbes simples qui converge vers  $\partial \tilde{D}$  pour la topologie de Hausdorff. Homotopons chaque courbe  $\tilde{c}_n$  dans  $\partial C_n$  de façon qu'elle minimise la longueur dans sa classe d'homotopie. Comme  $\partial \tilde{D}$  est une géodésique de  $H(\rho)$ , la suite de courbes simples ainsi obtenues (toujours notée  $(c_n)$ ) converge vers  $\partial \tilde{D}$ . Pour  $n$  assez grand,  $\tilde{c}_n$  est donc contenue dans  $\mathcal{V}$  et en particulier,  $c_n$  est disjointe des sommets de  $\partial C_n$ . Cette courbe  $\tilde{c}_n$  intersecte un certain nombre d'arêtes de  $C_n$  (comptées avec multiplicité), notons  $\theta_n$  la somme des angles dièdres externes de  $C_n$  en chacune de ces arêtes. D'après [EpM], la suite  $(\theta_n)$  converge vers  $i(\partial D, \lambda)$ . Soit  $\tilde{x}_n$  un point de  $\tilde{c}_n$  contenu dans une arête de  $\partial C_n$  ; considérons, comme dans [BoO], le cône géodésique  $\tilde{D}_n$  sur  $\tilde{c}_n$  issu de  $\tilde{x}_n$ . Ce cône  $\tilde{D}_n$  est un disque simplicial (dont nous noterons l'aire  $A_n$ ) bordé par  $\tilde{c}_n$ . En appliquant la formule de Gauss-Bonnet à chacun des triangles géodésiques qui le composent, on obtient  $\theta_n \geq 2\pi + A_n$ . Quitte à extraire, on peut supposer que  $\tilde{x}_n$  converge vers un point  $\tilde{x} \subset \partial \tilde{D}$ . Soient  $\tilde{\Sigma}$  une composante connexe de  $\partial H(\rho) - p^{-1}(\lambda)$  telle que  $\tilde{x} \notin \tilde{\Sigma}$ , que  $\tilde{\Sigma} \cap \partial \tilde{D} \neq \emptyset$  et que pour  $n$  assez grand  $\tilde{\Sigma} \subset \partial C_n$  et  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$  deux points distincts de  $\tilde{\Sigma} \cap \partial \tilde{D}$  ; notons  $A$  l'aire du triangle géodésique de sommets  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$ . Pour  $n$  assez grand, le triangle géodésique de sommets  $\tilde{x}_n$ ,  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$  est contenu dans  $\tilde{D}_n$  et a une aire supérieure à  $\frac{A}{2}$ . En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on conclut que  $i(\partial D, \lambda) \geq 2\pi + \frac{A}{2} > 2\pi$ .

Montrons enfin que  $\lambda$  vérifie la condition b<sub>1</sub>). Une géodésique  $\tilde{l}$  de la métrique induite sur  $\partial \tilde{M}$  qui n'intersecte pas  $p^{-1}(\lambda)$  est contenue dans une face totalement géodésique de  $\partial H(\rho)$ , c'est donc une géodésique de  $\mathbb{H}^3$ . Si la projection  $l \subset \partial M$  de  $\tilde{l}$  est une courbe parabolique, alors  $\tilde{l}$  est asymptote des deux côtés à un point fixe d'un élément parabolique de  $\rho(\pi_1(M))$ , ce qui est impossible pour une géodésique de  $\mathbb{H}^3$ . Si  $l^1$  et  $l^2$  sont deux géodésiques biasymptotes qui n'intersectent pas  $\lambda$  alors, elles ont des relevés  $\tilde{l}^1$  et  $\tilde{l}^2$  qui ont les deux mêmes bouts. Comme deux points de  $\partial \mathbb{H}^3$  sont joints par une unique géodésique ; alors  $\tilde{l}^1 = \tilde{l}^2$  ce qui est absurde.  $\square$

## 4 Le lemme de fermeture

L'étape principale de la preuve du théorème 1 est le lemme de fermeture suivant :

**Proposition 5 (Lemme de fermeture).** *Soient  $M$  une variété hyperbolique compacte de*

dimension 3 et  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$  une lamination géodésique mesurée appartenant à  $\mathcal{P}(M)$ . Supposons qu'il existe une suite de multi-courbes pondérées  $\lambda_n \in \mathcal{ML}(\partial M)$  telle que :

- i) pour tout  $n$ ,  $\lambda_n$  est la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique hyperbolique géométriquement finie  $\sigma_n$  sur l'intérieur de  $M$  ;
- ii) les laminations géodésiques mesurées  $\lambda_n$  convergent vers  $\lambda$  pour la topologie de  $\mathcal{ML}(\partial M)$  ;
- iii) les supports des  $\lambda_n$  convergent vers le support de  $\lambda$  pour la topologie de Hausdorff ;
- iv) pour tout  $n$ , les feuilles de poids  $\pi$  de  $\lambda$  sont des feuilles de poids  $\pi$  de  $\lambda_n$ .

Alors, il existe un métrique hyperbolique géométriquement fini  $\sigma_\infty$  dont la lamination géodésique mesurée de plissage est  $\lambda$ .

Afin de construire  $\sigma_\infty$ , nous allons montrer qu'une suite extraite de  $(\sigma_n)$  converge algébriquement. Rappelons la signification de la convergence algébrique pour les métriques  $\sigma_n$ . Si on fixe un point  $x_n$  dans  $M$  et un repère orthonormé de l'espace tangent en  $x_n$ , en identifiant ce point au point  $O \in \mathbb{H}^3$  et ce repère au repère orthonormé canonique de l'espace tangent  $T_O\mathbb{H}^3$ , on peut définir une représentation  $\rho_n : \pi_1(M) \rightarrow Isom(\mathbb{H}^3)$  associée à  $\sigma_n$ . La suite  $(\sigma_n)$  converge algébriquement si on peut choisir les points bases et les repères de l'espace tangent de sorte que  $\rho_n$  converge vers un homomorphisme  $\rho_\infty : \pi_1(M) \rightarrow Isom(\mathbb{H}^3)$ , en ce sens que  $\rho_n(g)$  converge vers  $\rho_\infty(g)$  pour tout  $g \in \pi_1(M)$ . De manière similaire, si  $(s_n)$  est une suite de métriques hyperboliques sur une composante  $\partial^j M$  de  $\partial M$ , on peut lui associer une suite de représentations  $r_n : \pi_1(\partial^j M) \rightarrow Isom(\mathbb{H}^2)$  bien définie à conjugaison près ; la convergence algébrique de  $(s_n)$  est la convergence, à conjugaison près, des représentations  $r_n$ .

Remarquons que si  $\sigma_n$  converge algébriquement, on a, a priori, seulement une équivalence d'homotopie entre l'intérieur de  $M$  et  $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ . Nous verrons dans la section suivante qu'ici l'équivalence d'homotopie peut être homotopée en un homéomorphisme. Ceci signifie que  $\rho_\infty$  est associée à une métrique hyperbolique complète sur l'intérieur de  $M$ .

Nous allons en premier lieu établir, comme dans [BoO] un lemme qui porte sur les longueurs  $l_{\sigma_n}(\lambda_n)$  des lieux de plissages  $\lambda_n$ . Notons  $\lambda_n^i$  les différentes composantes de  $\lambda_n$ , on définit  $l_{\sigma_n}(\lambda_n) = \sum_i p(\lambda_n^i) l_{\sigma_n}(\lambda_n^i)$  où  $p(\lambda_n^i)$  est le poids de  $\lambda_n^i$ .

**Lemme 4.1.** *Les longueurs  $l_{\sigma_n}(\lambda_n)$  ont une borne supérieure finie.*

*Démonstration.* Supposons que ce n'est pas le cas. Comme, pour tout  $n$ ,  $\lambda_n$  est une multi-courbe pondérée, les preuves des lemmes 9 et 13 de [BoO] fournissent une suite de disques essentiels  $m_n$  tels que  $i(\partial m_n, \lambda_n) \rightarrow 2\pi$ . Quitte à extraire, on peut supposer que  $\partial m_n$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $\mu$ . D'après le critère de Casson (cf. théorème B.1),  $\mu$  contient une feuille homoclinique  $l$  (éventuellement fermée). Montrons que  $i(l, \lambda) \leq 2\pi$ , la condition  $c_1$ ) donne alors la contradiction recherchée. Soit  $k$  un arc de  $l$  tel que  $\partial k \cap \lambda = \emptyset$  ; pour  $n$  assez grand, le bord de  $k$  est contenu dans le complémentaire de  $\lambda_n$  et  $m_n$  contient un arc  $k_n$  proche de  $k$ , de sorte que chaque point de  $\partial k_n$  appartient à la même composante du complémentaire de  $\lambda_n$  que le point correspondant de  $\partial k$ . On a alors  $i(k, \lambda_n) = i(k_n, \lambda_n) \leq i(m_n, \lambda_n)$ , d'où

$$i(k, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} i(k, \lambda_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} i(k_n, \lambda_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} i(m_n, \lambda_n) \leq 2\pi.$$

En considérant de tels arcs  $k$  qui tendent vers  $l$ , on a alors  $i(l, \lambda) \leq 2\pi$ . □

## 4.1 Construction de la représentation $\rho_\infty$

Nous allons construire la métrique  $\sigma_\infty$  comme valeur d'adhérence de la suite  $(\sigma_n)$ . En premier lieu, la proposition suivante va nous permettre de montrer que la suite  $(\sigma_n)$  a au moins une valeur d'adhérence pour la topologie algébrique (nous verrons plus tard que cette valeur d'adhérence correspond à une métrique sur l'intérieur de  $M$ ) :

**Proposition 6.** *Soient  $M$  une variété hyperbolique compacte, orientable de dimension 3 et  $\lambda \in \mathcal{P}(M)$  une lamination géodésique mesurée; supposons qu'il existe une suite de multi-courbes pondérées  $\lambda_n$  telles que :*

- i) *pour tout  $n$ ,  $\lambda_n$  est la lamination géodésique mesurée d'une métrique géométriquement finie  $\sigma_n$ ;*
- ii) *les laminations géodésiques mesurées  $\lambda_n$  convergent vers  $\lambda$  pour la topologie de  $\mathcal{ML}(\partial M)$ ;*
- iii) *les supports des  $\lambda_n$  convergent vers le support de  $\lambda$  pour la topologie de Hausdorff.*

*Alors quitte à extraire, la suite  $\sigma_n$  converge algébriquement.*

*Démonstration.* Nous allons montrer la proposition 6 par l'absurde. Supposons qu'aucune suite extraite de  $(\sigma_n)$  ne converge algébriquement. D'après la théorie développée par Morgan et Shalen dans [MoS1], quitte à extraire,  $\sigma_n$  tend vers une action minimale à petits stabilisateurs d'arêtes de  $\pi_1(M)$  sur un arbre réel  $\mathcal{A}$ . Cette action a la propriété suivante : si  $c$  est un élément de  $\pi_1(M)$  qui ne fixe aucun point de  $\mathcal{A}$  et  $c_n^* \subset M$  est la géodésique pour la métrique  $\sigma_n$  qui représente  $c$ , alors la suite  $(l_{\sigma_n}(c_n^*))$  n'est pas majorée. En particulier, d'après le lemme 4.1 et la condition iii), si  $\lambda^i$  est une feuille fermée de  $\lambda$ , alors  $\lambda^i$  a un point fixe dans  $\mathcal{A}$ .

Soit  $\partial^j M$  une composante de  $\partial M$ ; grâce à l'inclusion  $i_* : \pi_1(\partial^j M) \rightarrow \pi_1(M)$ , on a une action de  $\pi_1(\partial^j M)$  sur  $\mathcal{A}$ . Notons  $l_{\mathcal{A}}(c)$  la distance de translation de  $i_*(c)$  sur  $\mathcal{A}$ . D'après [MoO], on peut construire une lamination géodésique mesurée  $\beta$ , telle qu'il existe un morphisme  $\Phi : \mathcal{A}_\beta \rightarrow \mathcal{A}_{\partial^j M}$  de l'arbre dual de  $\beta$  dans le sous-arbre minimal de  $\mathcal{A}$  invariant par l'action de  $\pi_1(\partial^j M)$ . Par construction, les points de branchement de ce morphisme sont les projections de composantes connexes de  $\partial^j M - \beta$ . Comme l'action de  $\pi_1(\partial^j M)$  sur  $\mathcal{A}_{\partial^j M}$  n'est pas à petits stabilisateurs d'arêtes,  $f$  n'est pas, a priori, un isomorphisme et il existe plusieurs laminations  $\beta$  ayant cette propriété. Nous allons voir comment construire une telle lamination  $\beta$  qui n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement. De résultats de [K1S] et [MoS2], nous déduirons ensuite que  $\beta$  est annulaire. C'est cette contradiction avec la condition  $b_1$ ) qui nous permettra de conclure.

Pour chaque minimal exceptionnel  $\lambda^i$  de  $\lambda$ , notons  $S(\lambda^i)$  la surface embrassée par  $\lambda^i$ . Soit  $\delta$  la réunion des feuilles fermées de  $\lambda$  et des composantes des bords effectifs  $\partial^j \bar{S}(\lambda^i)$  des surfaces embrassées par les minimaux exceptionnels  $\lambda^i$  de  $\lambda \cap \partial M$ . Pour  $n$  assez grand, étendons  $\lambda_n \cup \delta$  en une multi-courbe  $\delta_n$  dont les composantes du complémentaire sont des pantalons. D'après Morgan et Otal ([MoO]), pour chaque composante  $\partial^j M$  de  $\partial M$ , il existe une lamination géodésique mesurée  $\beta_n \subset \mathcal{ML}(\partial^j M)$  et un morphisme équivariant  $\Phi_n$  de l'arbre réel  $\mathcal{A}_{\beta_n}$  dual de  $\beta_n$  dans  $\mathcal{A}$  tel que pour toute composante  $\delta_n^i$  de  $\delta_n$ ,  $l_{\mathcal{A}}(\delta_n^i) = l_{\mathcal{A}_\beta}(\delta_n^i)$ . Rappelons brièvement comment une telle lamination  $\beta_n$  est construite dans [Ot2]. Considérons une triangulation  $T$  de  $\partial^j M$  dont le 0-squelette est contenu dans  $\delta_n$  et dont le 1-squelette contient  $\delta_n$ . On construit une application équivariante  $\phi_n$  du revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de  $\partial^j M$  dans  $\mathcal{A}$  de la façon suivante : soit  $\tilde{\mathcal{S}}^0 \subset \mathbb{H}^2$  un relevé du 0-squelette de  $T$ ; chaque point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{\mathcal{S}}^0$  est contenu dans une composante  $\tilde{\delta}_n^i$  de la préimage de  $\delta_n \cap \partial^j M$  dans  $\mathbb{H}^2$ . On choisit pour  $\phi_n(\tilde{x}) \subset \mathcal{A}$  ou bien un point de l'axe de  $i_*(\delta_n^i)$  ou bien un point fixe de  $i_*(\delta_n^i)$ . On définit ensuite  $\phi_n$  sur toute la préimage de  $\tilde{\mathcal{S}}^0$  par équivariance puis on la prolonge sur le 1-squelette

et enfin sur le 2-squelette en une application  $\phi_n$  équivariante, transverse à une lamination mesurée  $\beta_n$ . A cette application  $\phi_n$  est associée (par passage au quotient) une application  $\Phi_n$  de l'arbre  $\mathcal{A}_{\beta_n}$  dual de  $\beta_n$  dans  $\mathcal{A}$ . Avec cette construction, si  $l_{\mathcal{A}}(\delta_n^i) > 0$ , alors la restriction de  $\Phi_n$  à l'axe de  $\delta_n^i$  est une isométrie et son image est l'axe de  $i^*(\delta_n^i)$  dans  $\mathcal{A}$ . Tandis que si  $l_{\mathcal{A}}(\delta_n^i) = 0$  (en particulier si  $\delta_n^i$  est une feuille fermée de  $\lambda$ ),  $i(\delta_n^i, \beta_n) = 0$ . Soit  $\lambda^i$  un minimal exceptionnel de  $\lambda$  tel que  $i_*(\pi_1(S(\lambda^i)))$  a un point fixe global  $X$  dans  $\mathcal{A}$ ; dans la construction de  $\phi_n$  prenons  $\phi_n(\check{x}) = X$  pour tout  $\check{x}$  dans le relevé de  $S(\lambda^i)$  qui intersecte  $\check{S}^0$ . On construit ainsi une lamination  $\beta_n$  telle que si  $i_*(\pi_1(S(\lambda^i)))$  a un point fixe global dans  $\mathcal{A}$ , alors  $\beta_n \cap S(\lambda^i) = \emptyset$  (i.e.  $\beta_n \cap \bar{S}(\lambda^i) \subset \delta$ ). Faisons la même construction pour chaque composante de  $\partial M$  et notons encore  $\beta_n \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  la lamination géodésique mesurée obtenue. Quitte à extraire, on peut supposer que les supports des  $\beta_n$  convergent géométriquement vers une lamination géodésique  $\beta$ . En utilisant comme dans [KIS] un argument de réalisation de réseau ferroviaire, nous allons montrer que  $\beta$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement. La lamination géodésique  $\alpha \subset \partial^j M$  est dite *réalisée* dans l'arbre réel  $\mathcal{A}$  s'il existe une application continue équivariante  $\phi$  du revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de  $\partial^j M$  dans  $\mathcal{A}$  dont la restriction à chaque feuille de la préimage de  $\alpha$  est injective.

**Affirmation 4.2.** *La lamination géodésique  $\beta$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement.*

*Démonstration.* Si  $\lambda^j$  est une feuille fermée de  $\lambda$ , alors  $\forall n, i(\beta_n, \lambda^j) = 0$  donc  $\beta$  n'intersecte pas  $\lambda^j$  transversalement. Supposons que  $\beta$  intersecte  $\lambda$  transversalement, il existe alors un minimal exceptionnel  $\lambda^i$  de  $\lambda$  qui intersecte  $\beta$  transversalement. Soit  $\lambda_n^i$  une composante de  $\lambda_n \cap S(\lambda^i)$ ; notons que pour  $n$  assez grand,  $i^*(\lambda_n^i)$  n'a pas de point fixe dans  $\mathcal{A}$ . Sinon, quitte à extraire,  $i^*(\lambda_n^i)$  a un point fixe dans  $\mathcal{A}$  et alors, par construction,  $\beta_n$  n'intersecte pas  $\lambda_n^i$  transversalement donc  $\beta$  n'intersecte pas  $\lambda^i$  transversalement.

Comme  $\lambda^i$  intersecte  $\beta$ , il existe un réseau ferroviaire  $\tau$  portant  $\lambda^i$  tel que  $\tau$  est réalisé dans  $\mathcal{A}_{\beta_n}$  pour  $n$  assez grand, c'est-à-dire que si  $\check{\tau}$  est la préimage de  $\tau$  dans le revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de  $\partial^j M \supset \tau$ , il existe une application  $g_n : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{A}_{\beta_n}$  continue, équivariante, constante sur les traverses de  $\check{\tau}$  et injective le long des rails de  $\check{\tau}$ . Comme  $i^*(\lambda_n^i)$  n'a pas de point fixe dans  $\mathcal{A}$ , la restriction de  $\Phi_n$  à l'axe de  $\lambda_n^i$  est une isométrie. Pour  $n$  assez grand, chaque rectangle de  $\check{\tau}$  contient un arc d'un relevé de  $\lambda_n^i$  donc  $\Phi_n \circ g_n$  est homotope à une réalisation de  $\tau$  dans  $\mathcal{A}$  (cf. [KIS]). D'après [Ot2] une telle application peut être homotopée en une réalisation de  $\lambda^i$  dans  $\mathcal{A}$ . Dans ce cas un théorème de continuité de J.-P. Otal ([Ot2, Théorème 4.0.1]) entraîne que  $l_{\sigma_n}(\lambda_n^i) \rightarrow \infty$  ce qui contredit le lemme 4.1.  $\square$

Si  $\beta$  est une multi-courbe, alors, pour  $n$  assez grand,  $\beta_n = \beta$ . Dans ce cas, l'affirmation 4.2 contredit la minimalité de l'action de  $\pi_1(M)$  sur  $\mathcal{A}$ . En effet,  $\beta_n = \beta$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement, donc, d'après les conditions  $b_1)$  et  $c)$ , un voisinage annulaire de  $\beta_n$  ne contient ni disques, ni anneaux, ni rubans de Möbius essentiels. D'après [MoS2, corollaire IV 1.3], ceci entraîne que l'action de  $\pi_1(M)$  laisse un point de  $\mathcal{A}$  invariant et a fortiori que  $\mathcal{A}$  n'est pas minimal.

Considérons ensuite le cas où  $\beta$  n'est pas une multi-courbe. Avant d'établir que  $\beta$  est annulaire, nous allons montrer que pour chaque composante connexe  $\beta^j$  de  $\beta$  qui n'est pas une courbe simple,  $S(\beta^j)$  est incompressible et en déduire que la suite des supports des  $\beta_n$  est constante.

**Lemme 4.3.** *Soit  $\beta^j$  une composante de  $\beta$  qui n'est pas une courbe simple; alors  $S(\beta^j)$  est incompressible.*

*Démonstration.* Supposons que  $\beta$  possède une composante  $\beta^j$  qui n'est pas une courbe simple et pour laquelle  $S(\beta^j)$  est compressible. D'après le lemme 3.2,  $S(\beta^j)$  contient une multi-courbe  $\gamma$  par rapport à laquelle  $\beta^j$  est en position prétendue et telle que  $\gamma$  contient un système  $\mu$  de méridiens admissible pour  $(M, S(\beta))$ . Comme la suite de laminations géodésiques  $(\beta_n \cap S(\beta^j))$  converge géométriquement vers  $\beta^j$ , on en déduit que pour  $n$  suffisamment grand  $\beta_n \cap S(\beta^j)$  est en position prétendue par rapport à  $\gamma$  et, d'après le fait B.3, elle ne contient pas d'arcs de compression vers  $\mu$ . Ceci nous permet d'utiliser un résultat dû à G. Kleineidam et J. Souto ([KlS]) :

**Proposition 7.** *Soit  $S \subset \partial M$  une surface compressible,  $\alpha \subset \mathcal{ML}(S)$  une lamination géodésique mesurée telle qu'il existe un morphisme équivariant  $f : \mathcal{A}_\alpha \rightarrow \mathcal{A}$ . Soit  $\mu^1 \subset S$  un méridien tel que  $\mu^1$  intersecte  $\alpha$  transversalement et que  $\alpha$  ne contient pas d'arcs de compression vers  $\mu^1$  ; alors il existe une suite de méridiens  $(\nu_n) \subset S$  qui converge géométriquement vers une lamination  $\nu$  qui n'intersecte pas  $\alpha$  transversalement.*

*Démonstration.* D'après [KlS], si  $\alpha$  satisfait les hypothèses de cette proposition, alors il existe une feuille homoclinique  $l \subset S$  telle que  $l \cup \alpha$  est une lamination géodésique. Notons  $\alpha' \subset \alpha$  la réunion des minimaux de  $\bar{l}$  ; d'après la construction de [KlS],  $\alpha'$  est en position prétendue par rapport à  $\mu^1$ . Toujours d'après [KlS] ceci entraîne qu'il existe une suite  $(\nu_n)$  de méridiens de  $S$  qui vérifie :

- $(\nu_n)$  converge géométriquement vers une lamination  $\nu$  qui n'intersecte pas  $l$  transversalement
- pour tout voisinage  $\mathcal{V}(l)$  de  $l$ , il existe  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $\nu_n$  peut être homotopé dans  $\mathcal{V}(l)$ .

De cette dernière propriété on déduit que  $\nu$  n'intersecte pas  $\alpha - \alpha'$  et la première propriété nous permet alors de conclure que  $\nu$  n'intersecte pas  $\alpha$  transversalement.  $\square$

En appliquant cette proposition à chacune des laminations  $\beta_n \cap S(\beta^j)$ , on en déduit que  $S(\beta^j)$  contient une suite de méridiens qui converge géométriquement vers une lamination géodésique  $\nu$  qui n'intersecte pas  $\beta^j$  transversalement. Comme  $\lambda$  n'intersecte pas  $\beta^j$  transversalement, alors  $\lambda \cap S(\beta^j) \subset \beta^j$  et  $\nu$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement. D'après le critère de Casson,  $\nu$  contient une feuille homoclinique, ce qui contredit le lemme 3.3.  $\square$

Déduisons-en que le support de  $\beta_n$  est indépendant de  $n$ . Soit  $\beta^j$  une composante connexe de  $\beta$  ; si  $\beta^j$  est une feuille fermée, alors pour tout  $n$ ,  $\beta^j \subset \beta_n$ . Supposons donc que  $\beta^j$  n'est pas une feuille fermée. D'après ce qui précède,  $S(\beta^j)$  est incompressible et donc l'action de  $i_*(\pi_1(S(\beta^j)))$  sur son sous-arbre invariant minimal  $\mathcal{A}_{S(\beta^j)} \subset \mathcal{A}$  est à petits stabilisateurs d'arêtes. Comme  $\beta$  n'intersecte pas  $\partial' \bar{S}(\beta^j)$ , alors, pour  $n$  assez grand,  $\beta_n$  n'intersecte pas  $\partial' \bar{S}(\beta^j)$ . On en déduit d'une part que  $\beta_n^j = \beta_n \cap S(\beta^j)$  est une lamination géodésique mesurée et d'autre part que, pour chaque composante de  $\partial' \bar{S}(\beta^j)$ , l'action de l'élément correspondant de  $\pi_1(\partial M)$  a un point fixe dans  $\mathcal{A}_{S(\beta^j)}$ . On peut donc appliquer le théorème de Skora [Sk], d'après lequel la lamination géodésique mesurée  $\beta_n^j$  est duale de l'action de  $\pi_1(S(\beta^j))$  sur  $\mathcal{A}_{S(\beta^j)}$ . En faisant ce raisonnement pour chaque composante connexe de  $\beta$ , on en déduit que la suite des supports des  $\beta_n$  est constante. La lamination géodésique  $\beta$  est le support d'une lamination géodésique mesurée  $\beta_n$  de cette suite ; munissons  $\beta$  de la mesure de  $\beta_n$  et notons  $\beta$  la lamination géodésique mesurée obtenue.

Montrons enfin que  $\beta$  est annulaire. Comme  $\beta$  est maintenant une lamination géodésique mesurée, son support est une réunion de courbes simples et de minimaux exceptionnels. A la

réunion des surfaces  $S(\beta^j)$  embrassées par les minimaux exceptionnels  $\beta^j$  de  $\beta$ , ajoutons des voisinages annulaires des feuilles fermées de  $\beta$  qui ne sont pas contenues dans le bord effectif  $\partial' \bar{S}(\beta^j)$  d'une surface embrassée par un minimal exceptionnel de  $\beta$ ; notons  $S(\beta)$  la surface ainsi obtenue. Par définition de  $\beta$ , pour toute composante  $\Sigma$  de  $\partial M - S(\beta)$ ,  $i_*(\pi_1(\Sigma))$  a un point fixe dans  $\mathcal{A}$ .

**Lemme 4.4.** *La lamination géodésique  $\beta$  est annulaire.*

*Démonstration.* Supposons que  $S(\beta)$  contient un courbe parabolique  $\mu$ . Puisque  $\beta$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement (affirmation 4.2), d'après la condition  $b_1$ ),  $\mu$  n'est pas contenue dans  $\beta$ , donc  $\mu$  est contenue dans la surface embrassée par un minimal exceptionnel  $\beta^j$  de  $\beta$ . Comme  $\rho_n(i_*(\mu))$  est parabolique pour tout  $n$ , l'action de  $i^*(\mu)$  a un point fixe dans  $\mathcal{A}_{S(\beta^j)}$ , donc  $\beta^j$  n'intersecte pas  $\mu$ . D'après l'affirmation 2.8 on en déduit que soit  $\mu \subset \partial' S(\beta^j)$ , soit  $\mu \subset \beta^j$ . Dans les deux cas, on obtient une contradiction entre la condition  $b_1$ ) et l'affirmation 4.2. La surface  $S(\beta)$  ne contient donc pas de courbes paraboliques.

Comme  $S(\beta)$  est incompressible (et ne contient pas de courbes paraboliques), on peut considérer une sous-variété caractéristique  $W$  relative à  $S(\beta)$  (voir section 2.3). Pour chaque composante  $\Sigma$  de  $\partial M - S(\beta)$ ,  $i_*(\pi_1(\Sigma))$  a un point fixe dans  $\mathcal{A}$ , donc, d'après [MoS2, théorème IV 1.2], on peut isotoper  $W$  de manière que le support de  $\beta$  soit contenu dans  $W \cap \partial M$ . Nous allons alors utiliser, comme dans [BoO] la structure de  $W$ . Nous sommes dans le cas où  $\beta$  n'est pas une multi-courbe pondérée donc  $\beta$  contient un minimal exceptionnel  $\beta^1$ . Ce minimal  $\beta^1$  est contenu dans le bord d'un  $I$ -fibré  $W^1 \subset W$ . Soit  $F^1$  la surface de base du fibré  $W^1$  et  $q : \partial W^1 \rightarrow F^1$  la projection le long des fibres. D'après le théorème de Skora, pour chaque composante  $\Sigma$  de  $W^1 \cap \partial M$ ,  $\Sigma \cap \beta$  est la lamination duale de l'action de  $\pi_1(\Sigma)$  sur son sous-arbre invariant minimal dans  $\mathcal{A}$ . Comme cette action se factorise par l'action de  $\pi_1(W^1) = \pi_1(F^1)$ , il existe une lamination géodésique mesurée  $\beta' \in \mathcal{ML}(F^1)$  telle que  $\beta \cap W^1 \supset p^{-1}(\beta')$ . On en déduit que  $\beta$  est annulaire.  $\square$

Comme  $\beta$  est annulaire, la condition  $b_1$ ) contredit le fait que  $\beta$  n'intersecte pas  $\lambda$ . Cette contradiction achève la preuve de la proposition 6.  $\square$

**Remarque.** D'après un théorème de V. Chuckrow,  $\rho_\infty$  est fidèle et discrète.

Nous allons ensuite compléter la proposition 6, afin d'obtenir le lemme de fermeture (proposition 5) en montrant que  $\rho_\infty$  est associée à une métrique  $\sigma_\infty$ , géométriquement finie et dont la lamination géodésique mesurée de plissage est  $\lambda$ .

## 4.2 Fin de la preuve du lemme de fermeture

*Démonstration.* Considérons une suite de multi-courbes pondérées  $\lambda_n \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  comme dans l'énoncé du lemme de fermeture; à chaque métrique  $\sigma_n$ , on peut associer une représentation  $\rho_n : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  définie à conjugaison près. D'après la proposition 6, on peut choisir les  $\rho_n$  de sorte que, quitte à extraire, la suite  $(\rho_n)$  converge vers une représentation  $\rho_\infty : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  fidèle et discrète. Notons  $\lambda^{(p)}$  la réunion des feuilles de poids  $\pi$  de  $\lambda$ . D'après la condition iu), les feuilles de  $\lambda^{(p)}$  correspondent à des pointes de rang 1 de  $\rho_n(\pi_1(M))$  pour tout  $n$ . Comme  $(\lambda_n)$  converge vers  $\lambda$  dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$ , pour  $n$  assez grand, toute pointe de rang 1 de  $\rho_n(\pi_1(M))$  est représentée par une feuille de  $\lambda^{(p)}$ . Comme  $\rho_n$  converge, les feuilles de  $\lambda^{(p)}$  correspondent à des éléments paraboliques de  $\rho_\infty(\pi_1(M))$ . Considérons une composante  $S$  de  $\partial M - \lambda^{(p)}$ ; l'application  $f_n = i \circ h'_n : S \rightarrow N(\rho_n)$  composée

de l'inclusion  $i : S \rightarrow M$  et de l'extension naturelle  $h'_n : M - \lambda^{(p)} \rightarrow N(\rho_n)$  de l'homéomorphisme  $h_n : M \rightarrow N(\rho_n)^{ep}$  est une surface plissée. C'est-à-dire que si  $s_n$  est la métrique induite par  $f_n$ ,  $s_n$  est une métrique hyperbolique complète et tout point  $x \in S$  est contenu dans l'intérieur d'un segment  $k$ , géodésique pour  $s_n$ , tel que  $f_n(k)$  est un segment géodésique de  $\mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$ . Une telle surface plissée  $f_n$  est totalement géodésique sur le complémentaire d'une lamination géodésique (dans le cas de  $f_n$ , il s'agit du support de  $\lambda_n$ ).

En comparant certaines longueurs sur  $(S, s_n)$  avec des longueurs dans  $(M, \sigma_n)$ , grâce à un lemme d'approximation des courbes légèrement plissées (lemme A.1), nous allons voir que la convergence algébrique de  $(\sigma_n)$  entraîne la convergence algébrique d'une suite extraite de  $(s_n)$ . Ceci nous permettra d'extraire de la suite des surfaces plissées  $f_n$  une sous-suite convergente et de conclure comme dans [BoO].

**Lemme 4.5.** *Quitte à extraire la suite de métriques  $(s_n)$  converge algébriquement.*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que la suite  $(s_n)$  est bornée dans l'espace modulaire. L'espace modulaire de  $S$  étant le quotient de l'espace de Teichmüller par le groupe des difféotopies de  $S$ , ceci signifie qu'il existe une suite  $(\psi_n)$  de difféomorphismes de  $S$  telle que la suite des métriques  $(\psi_{n*}s_n)$  est bornée dans l'espace de Teichmüller. Pour cela, il suffit, d'après le lemme de Mumford (cf. [CEG]), de montrer qu'il existe une constante  $A > 0$  qui, pour tout  $n$ , minore la longueur de la plus petite géodésique de  $(S, s_n)$ .

**Affirmation 4.6.** *La suite  $s_n$  est bornée dans l'espace modulaire.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une suite de géodésiques simples  $\alpha_n$  telles que  $l_{s_n}(\alpha_n) \rightarrow 0$ . On peut supposer que, quitte à extraire,  $\alpha_n$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $\alpha$ .

i) Considérons le cas où  $\alpha$  intersecte  $\lambda$  transversalement. Soit  $I$  un segment de  $\alpha$  qui intersecte  $\lambda$  transversalement; munissons  $\alpha_n$  d'une mesure transverse de poids 1. Pour  $n$  assez grand, on a alors  $i(\alpha_n, \lambda_n) > \frac{i(I, \lambda)}{2} > 0$ . Comme  $l_{s_n}(\alpha_n) \rightarrow 0$ , alors  $\alpha_n$  est l'âme d'un tube de Margouliis de plus en plus large. Donc, si  $k$  est un segment de  $\lambda_n$  qui intersecte  $\alpha_n$  uniquement en ses extrémités, alors il existe  $K_n$  tel que  $l_{s_n}(k) \geq 2K_n$  et  $K_n \rightarrow \infty$ . On en déduit  $l_{s_n}(\lambda_n) \geq i(\lambda_n, \alpha_n)K_n \rightarrow \infty$  ce qui est impossible car  $l_{s_n}(\lambda_n) = l_\sigma(\lambda_n)$  est bornée (lemme 4.1).

ii) Si  $\alpha$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement, nous allons distinguer deux sous-cas, suivant que le support de  $\alpha$  contient une feuille fermée ou pas.

ii') Si le support de  $\alpha$  contient une feuille fermée  $\alpha^1$ ; comme celle-ci n'intersecte pas  $\lambda$  elle n'intersecte pas  $\delta$  non plus (la multi-courbe  $\delta$  est la même que celle définie au début de la preuve de la proposition 6 : c'est la réunion des feuilles fermées de  $\lambda$  et des composantes des bords effectifs  $\partial^i S(\lambda^i)$  des surfaces embrassées par les minimaux exceptionnels  $\lambda^i$  de  $\lambda \cap \partial M$ ). Pour tout  $\eta > 0$ ; nous allons construire une courbe simple  $c_\eta$  qui intersecte transversalement  $\alpha^1$  en un ou deux points et telle que  $i(c_\eta, \lambda - \alpha^1) < \eta$ . Soit  $\eta > 0$ . Notons  $S^1$  et  $S^2$  les composantes de  $S - (\delta \cup \alpha^1)$  bordées par  $\alpha^1$ ; nous avons deux situations possibles suivant que  $S^1$  et  $S^2$  sont confondues ou non.

Si  $S^1 = S^2$ ; comme  $\partial S^1$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement, il existe une courbe simple  $c' \subset S^1$  telle que  $i(c', \lambda) \leq \eta$  et un arc  $k$  tels que  $k \cap c' = \partial k$ ,  $i(k, \lambda - \alpha^1) \leq \frac{\eta}{2}$  et que  $k$  intersecte  $\alpha^1$  en un seul point. Par chirurgie de  $c'$  le long de  $k$ , on obtient, après homotopie, deux géodésiques simples fermées  $c_\eta$  et  $c''$  qui intersectent  $\alpha^1$  en un point et telles que  $i(c_\eta, \lambda - \alpha^1) \leq \eta$ .

Si  $S^1 \neq S^2$ ; il existe deux courbes fermées simples  $c_1 \subset S^1$  et  $c_2 \subset S^2$  telles que  $i(c_1, \lambda) \leq \frac{\eta}{4}$  et  $i(c_2, \lambda) \leq \frac{\eta}{4}$  et un arc  $k$  joignant  $c_1$  à  $c_2$  tels que  $i(k, \lambda - \alpha^1) \leq \frac{\eta}{4}$ . La courbe

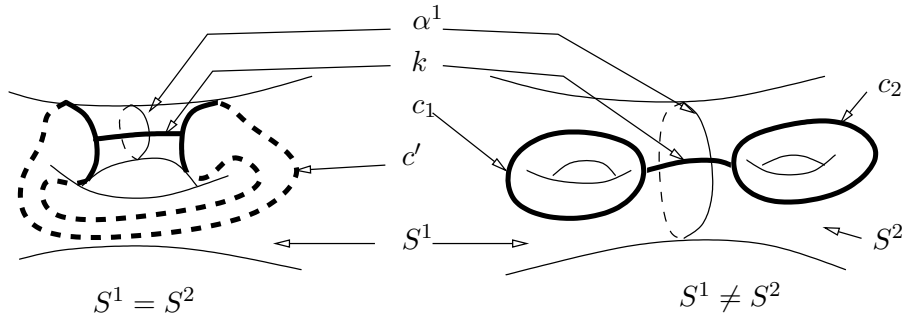


FIG. 3 –

$c_2 k^{-1} c_1 k$  est homotope à une géodésique fermée simple  $c_\eta$  qui intersecte  $\alpha^1$  en deux points et telle que  $i(c_\eta, \lambda) \leq \eta$  (cf. figure 3).

Dans les deux cas, on a obtenu une géodésique simple fermée  $c_\eta$  qui intersecte  $\alpha^1$  et telle que  $i(c_\eta, \lambda - \alpha^1) \leq \eta$ . Comme  $\alpha^1$  n'est pas une feuille de poids  $\pi$  de  $\lambda$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour  $n$  assez grand, l'angle de plissage de  $N(\rho_n)$  en  $\alpha^1$  est inférieur à  $\pi - \varepsilon$ . Notons  $k^1$  et  $k^2$  les composantes de  $c_\eta - \alpha^1$  (avec éventuellement  $k^1 = k^2$ ); fixons  $n$  et notons  $\tilde{k}^1$  et  $\tilde{k}^2$  des relevés de  $k^1$  et  $k^2$  à  $\partial H(\rho_n)$  tels que  $\tilde{k}^1 \neq \tilde{k}^2$  et que  $\tilde{k}^1 \cap \tilde{k}^2 \neq \emptyset$ . Soient  $\tilde{\kappa}^j$ ,  $j = 1, 2$ , les segments géodésiques de  $\mathbb{H}^3$  qui joignent les extrémités de  $\tilde{k}^j$  (voir figure 4). Pour  $j = 1$

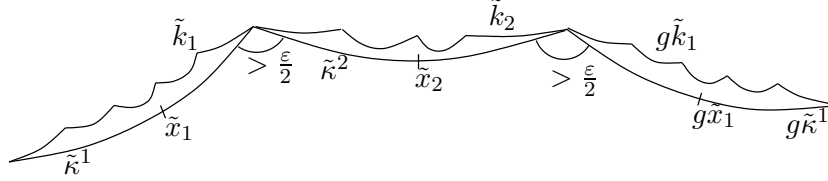


FIG. 4 –

ou 2,  $\partial k^j$  est contenu dans  $\alpha^1$  et  $\alpha^1$  est contenue dans la limite géométrique de  $\alpha_n$ . Donc pour  $n$  assez grand,  $k^j$  intersecte  $\alpha_n$  en au moins deux points. Comme  $\alpha_n$  est l'âme d'un tube de Margoullis très large, ceci entraîne que  $l_{\sigma_n}(k^j) \rightarrow \infty$ . Comme  $i(k^j, \lambda) \leq \eta$ , alors, pour  $n$  assez grand,  $i(k^j, \lambda_n) < 2\eta$ . D'après le lemme A.2, pour  $\eta$  suffisamment petit, les  $k^j$  sont des segments  $C_\eta$ -quasi-géodésiques pour  $\sigma_n$ , donc  $l_{\sigma_n}(\kappa^j) \rightarrow \infty$ . Notons  $g$  l'élément de  $\rho_n(\pi_1(M))$  qui envoie  $\tilde{k}^1$  sur un arc qui intersecte  $\tilde{k}^2$ ; si  $k^1 \neq k^2$ , alors  $g$  représente  $c_\eta$  alors que si  $k^1 = k^2$ , c'est le carré de l'élément représentant  $c_\eta$ . Une des conséquences de la preuve du lemme A.2 est que, pour  $\eta$  suffisamment petit, les segments  $\tilde{\kappa}^1$  et  $\tilde{\kappa}^2$  font, en leur extrémité commune, un angle supérieur à  $\frac{\varepsilon}{2}$  et qu'il en est de même de  $\tilde{\kappa}^2$  et  $g(\tilde{\kappa}^1)$ . Soient  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$  les milieux de  $\tilde{\kappa}^1$  et  $\tilde{\kappa}^2$ ; comme l'angle que font  $\tilde{\kappa}^1$  et  $\tilde{\kappa}^2$  en leur extrémité commune est minoré par  $\frac{\varepsilon}{2}$  et que  $l_{\sigma_n}(\kappa^j) \rightarrow \infty$ ; alors les longueurs des segments géodésiques  $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]$  et  $[\tilde{x}_2, g(\tilde{x}_1)]$  sont grandes et l'angle  $\widehat{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 g(\tilde{x}_1)}$  est proche de  $\pi$ . La réunion  $\tilde{k}$  des segments géodésiques  $[g^i(\tilde{x}_1), g^i(\tilde{x}_2)]$  et  $[g^i(\tilde{x}_2), g^{i+1}(\tilde{x}_1)]$  pour  $i \in \mathbb{Z}$  est donc une quasi-géodésique et la longueur  $l_{\sigma_n}(\tilde{k}/g)$  de sa projection dans  $\mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$  est grande. Finalement, si  $c_\eta^*$  est la géodésique pour  $\sigma_n$  dans la classe d'homotopie de  $c_\eta$ , alors  $l_{\sigma_n}(c_\eta^*) \rightarrow \infty$ , ce qui contredit la convergence algébrique de  $\rho_n$ .

ii") Si le support de  $\alpha$  ne contient pas de géodésiques fermées, alors il contient un minimal exceptionnel. Comme  $\alpha$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement, il existe, pour tout  $\eta > 0$ , une géodésique fermée  $c_\eta$  qui intersecte  $\alpha$  transversalement et telle que  $i(c_\eta, \lambda) \leq \eta$ . On a alors pour  $n$  assez grand  $i(c_\eta, \lambda_n) \leq 2\eta$ . Pour  $\eta$  suffisamment petit, d'après le lemme d'approxima-



tion des courbes légèrement plissées (lemme A.1),  $c_\eta$  est une  $C_\eta$ -quasi-géodésique pour  $\sigma_n$ . Comme  $l_{s_n}(\alpha_n) \rightarrow 0$ , on a encore  $l_{s_n}(c_\eta) \rightarrow \infty$ , donc  $l_{\sigma_n}(c_\eta^*) \rightarrow \infty$  ce qui contredit la convergence algébrique de  $\rho_n$ .

Finalement, il n'existe pas de suite  $(\alpha_n)$  de courbe fermées telle que  $l_{s_n}(\alpha_n) \rightarrow 0$  et le lemme de Mumford permet de conclure.  $\square$

Comme  $(s_n)$  est bornée dans l'espace modulaire, on peut en extraire une sous-suite qui converge dans l'espace modulaire, c'est-à-dire qu'il existe une suite de difféomorphismes  $\psi_n : S \rightarrow S$  tels que  $\psi_{n*}s_n$  converge algébriquement vers une métrique  $s_\infty$ . Complétons la multicourbe  $\delta \cap S$  en une décomposition en pantalons de  $S - \bigcup_j S(\lambda^j)$  et notons  $\delta_S$  la multi-courbe ainsi obtenue.

Soit  $\delta_S^i$  une composante de  $\delta_S$ ; comme  $\delta_S^i$  n'intersecte pas  $\lambda_n$  transversalement, on a  $l_{\psi_{n*}s_n}(\psi_n^{-1}(\delta_S^i)) = l_{s_n}(\delta_S^i) = l_{\rho_n}(\delta_S^{i*})$  et  $l_{\rho_n}(\delta_S^{i*}) \rightarrow l_{\rho_\infty}(\delta_S^{i*})$ . Donc  $l_{s_n}(\delta_S)$  est bornée. Notons  $r_n : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  une représentation associée à  $\psi_{n*}s_n$ , telle que  $(r_n)$  converge. Comme  $r_n$  converge et que  $l_{\psi_{n*}s_n}(\psi_n^{-1}(\delta_S))$  converge, alors, quitte à extraire,  $r_n(\psi_n^{-1}(\delta_S))$  converge. Comme, en dimension 2, la limite algébrique et la limite géométrique sont confondues, alors, quitte à extraire,  $\psi_n^{-1}(\delta_S)$  est constante à homotopie près. On en déduit qu'il existe  $n_0$  tel que  $\psi_n \circ \psi_{n_0}^{-1}(\delta_S) = \delta_S$ . On peut donc écrire (à isotopie près) le difféomorphisme  $\psi_n \circ \psi_{n_0}^{-1}$  comme composés de difféomorphismes qui laissent invariant le complémentaire d'une composante de  $S - \delta_S$  et de twists de Dehn le long des composantes de  $\delta_S$ . Notons que de tels difféomorphismes commutent.

Soit  $R$  une composante de  $S - \delta_S$ ; si  $R$  est un pantalon alors la suite  $(\psi_n \circ \psi_{n_0}^{-1}|_R)$  est constante à isotopie près. Si  $R$  n'est pas un pantalon, c'est une surface embrassée par un minimal exceptionnel  $\lambda^j$  de  $\lambda$ . Supposons que la suite des restrictions de  $s_n$  à  $R$  n'est pas bornée. Comme les longueurs des composantes de  $\partial R$  convergent, alors, quitte à extraire,  $s_n$  tend vers une classe projective de lamination géodésique mesurée  $\gamma$  dans la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller de  $R$  (cf. [Th2] ou [FLP]). Si on préfère un autre point de vue, le théorème de Skora permet de relier ceci à la théorie de Morgan et Shalen : n'étant pas bornée, la suite  $(s_n)$  tend vers une action minimale à petits stabilisateurs d'arêtes de  $\pi_1(R)$  sur un arbre réel  $\mathcal{T}$ . En appliquant le théorème de Skora [Sk], on construit une lamination géodésique mesurée duale de cette action. D'après la définition de l'action de  $\pi_1(R)$  sur  $\mathcal{T}$ , cette lamination est dans la classe projective de  $\gamma$ . Comme la longueur de la multi-courbe pondérée  $\lambda_n \cap R$  est bornée (affirmation 4.1), alors  $i(\lambda^j, \gamma) = 0$  (cf. [Th2], [FLP]). Nous allons adapter le raisonnement du ii) de l'affirmation 4.6. Comme  $\lambda^j$  est arationnelle dans  $S(\lambda^j) = R$  (affirmation 2.8), alors  $\gamma$  et  $\lambda^j$  ont le même support. Il existe donc une courbe simple  $c_\eta$  telle que  $i(c_\eta, \lambda) \leq \eta$  et  $i(c_\eta, \gamma) > 0$ . On en déduit que  $l_{s_n}(c_\eta) \rightarrow \infty$  et le lemme d'approximation des courbes légèrement plissées entraîne que  $l_{\sigma_n}(c_\eta^*) \rightarrow \infty$ . Ceci contredit la convergence algébrique de  $\rho_n(\pi_1(M))$  et cette contradiction montre que la suite des restrictions de  $s_n$  à  $R$  est bornée. Comme le groupe modulaire de  $R$  agit proprement sur l'espace de Teichmüller de  $R$ , alors, quitte à extraire, la suite  $(\psi_n \circ \psi_{n_0}^{-1}|_R)$  est constante à isotopie près.

On déduit de tout ce qui précède que, quitte à extraire,  $\psi_n \circ \psi_{n_0}^{-1}$  est un composé de twists de Dehn le long des composantes de  $\delta_S$ . Supposons qu'il existe une composante  $\delta_S^i \subset \delta_S$  telle que le nombre de twists de Dehn le long de  $\delta_S^i$  dans la décomposition de  $\psi_n \circ \psi_{n_0}^{-1}$  tend vers l'infini avec  $n$ . On est alors dans l'une des situations étudiées dans l'affirmation 4.6. Il existe en effet une courbe  $c_\eta$  qui intersecte  $\delta_S^i$  en un ou deux points et qui vérifie  $i(c_\eta, \lambda - \delta_S^i) \leq \eta$ . Notons  $k^1$  et  $k^2$  les composantes de  $c_\eta - \delta_S^i$ . Nous allons voir que nous sommes dans la situation du cas ii) de l'affirmation 4.6. La contradiction obtenue dans ce cas prouve que le

nombre de twists de Dehn le long de  $\delta_S^i$  est borné. Pour nous ramener au cas ii'), il nous suffit de montrer que pour  $j = 1, 2$ ,  $l_{s_n}(k^j) \rightarrow \infty$ . Comme le nombre de twists de Dehn le long de  $\delta_S^i$  tend vers l'infini, en chaque point de  $c_\eta \cap \delta_S^i$ , l'angle entre  $\delta_S^i$  et  $c_\eta$  tend vers 0 (cf. [FLP]). Comme  $l_{s_n}(\delta_S^i)$  est bornée, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $n$ , un  $\varepsilon$ -voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\delta_S^i$  est un anneau plongé dans  $\partial M$ . Pour  $j = 1$  ou  $2$ , en chaque extrémité de  $k^j$ , l'angle entre  $k^j$  et  $\delta_S^i$  tend vers 0, ceci entraîne que pour  $n$  assez grand,  $\mathcal{V}$  contient un segment très long de  $k^j$ . Il s'ensuit que  $l_{s_n}(k^j) \rightarrow \infty$ . On en déduit que le nombre de twists de Dehn de  $\psi_n$  le long de chaque composante de  $\delta_S$  est borné, et donc que, quitte à extraire, la suite  $s_n$  converge algébriquement vers une métrique que nous noterons encore  $s_\infty$ .  $\square$

A  $n$  fixé, choisissons une identification du revêtement universel de  $S$  avec  $\mathbb{H}^2$  qui induise une métrique dans la classe d'isotopie de  $s_n$ . Cette identification fournit une représentation  $r_n : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ . D'après le lemme 4.5, on peut choisir cette identification de façon que la suite  $(r_n)$  converge vers une représentation  $r_\infty : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ . Choisissons un relevé  $\check{f}_n : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ . Ceci est équivalent au choix du point base  $O$  de  $\mathbb{H}^2$  et de la classe d'homotopie d'un arc  $k$  allant dans  $M$  du point base utilisé pour définir  $\pi_1(M)$  à la projection de  $O$  sur  $S \subset \partial M$ . Le lemme qui suit ([BoO, lemme 17]) assure qu'on peut choisir  $(\check{f}_n)$  de façon que les images des applications  $\check{f}_n$  intersectent un même compact de  $\mathbb{H}^3$ .

Notons  $x_n$  l'image dans  $\mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$  du point base  $O \in \mathbb{H}^3$ . On a :

**Lemme 4.7 ([BoO], lemme 17).** *Il existe un arc  $k_n$  de longueur uniformément bornée qui joint  $f_n(S)$  au point base  $x_n$ .*

Considérons le relevé  $\check{f}_n$  de  $f_n$  défini par l'arc  $k_n$  du lemme 4.7. D'après le théorème d'Ascoli, on peut extraire une sous-suite telle que la suite  $\check{f}_n$  converge uniformément sur tout compact vers une application  $\check{f}_\infty : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ . Pour tout  $g \in \pi_1(S)$ , on a  $\check{f}_n \circ r_n(g) = \rho_n(i_*(g)) \circ \check{f}_n$ . Or  $r_n$  converge algébriquement vers  $r_\infty$  donc  $\check{f}_\infty \circ r_\infty(g) = \rho_\infty(i_*(g)) \circ \check{f}_\infty$ . On en déduit que l'application  $\check{f}_\infty$  passe au quotient en une application  $f_\infty : S \rightarrow \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$  qui, d'après [CEG], est une surface plissée.

La suite et la fin de la preuve du lemme de fermeture sont similaires à celles de [BoO], nous allons en dresser ici les grandes lignes.

Montrons que la surface plissée  $f_\infty$  est convexe. Soit  $(x_i) \subset (\mathbb{H}^2)^\mathbb{N}$  un ensemble dénombrable tel que chaque face totalement géodésique de  $\check{f}_\infty(\mathbb{H}^2)$  contient dans son intérieur un unique élément de  $\{\check{f}_\infty(x_i), i \in \mathbb{N}\}$ . Notons  $P_i$  le plan géodésique tangent en  $\check{f}_\infty(x_i)$  à  $\check{f}_\infty(\mathbb{H}^2)$  et  $T_k$  la réunion des adhérences des composantes connexes de  $\bigcup_{i=1}^k (P_i - \bigcup_{j=1, j \neq i}^k P_j)$  qui contiennent l'un des  $\check{f}_\infty(x_i)$  pour  $i \leq k$ . Par convergence de  $\check{f}_n$ ,  $T_k$  est la limite d'une suite de toits polyédraux des  $\check{f}_n(\mathbb{H}^2)$ . Par continuité,  $\check{f}_\infty(\mathbb{H}^2)$  est entièrement contenue dans l'adhérence d'une composante de  $\mathbb{H}^3 - T_k$  et, en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ , on en déduit que  $\check{f}_\infty(\mathbb{H}^2)$  est une surface convexe (cf. [BoO]).

En opérant ainsi pour chaque composante de  $\partial_{\chi < 0} M - \lambda^{(p)}$ , on obtient une surface plissée  $f_\infty : \partial_{\chi < 0} M - \lambda^{(p)} \rightarrow \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ . Si cette application n'est pas injective, il existe deux points  $x, x' \subset \partial M$  qui ont la même image par  $f_\infty$ . Par convergence des  $f_n$  ceci entraîne que les convexes  $N(\rho_n)$  "s'applatissent", au sens où la limite de  $h'_n(\partial_{\chi < 0} M - \lambda^{(p)}) = \partial N(\rho_n)$  est contenue dans un plan  $\mathbb{H}^2/\rho_\infty(\pi_1(M)) \subset \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ . Or, dans ce cas,  $\rho_\infty$  est fuchsienne et  $\lambda$  ne peut pas satisfaire la condition  $b_1$ ) (ou la condition  $c$ ) si  $M$  est un fibré en intervalles sur un pantalon). On en déduit que  $f_\infty$  est un homéomorphisme sur son image et que son image borde un convexe  $C \subset \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$  (cf. [BoO] pour plus de détails). A chaque composante  $\lambda^i$  de  $\lambda^{(p)}$ , correspondent deux bouts de  $\partial M - \lambda^{(p)}$  dont les images par  $f_\infty$  sont deux anneaux non compacts, totalement géodésiques qui convergent dans  $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$

vers la pointe correspondant à  $\lambda^i$ . En enlevant à  $f_\infty(\partial M - \lambda^{(p)})$ , pour chaque composante de  $\lambda^{(p)}$ , ces deux anneaux et en reconnectant le bord par un anneau compact, on obtient une surface compacte  $S_\infty$ . Soient  $M'$  la variété obtenue en enlevant à  $M$  un petit voisinage tubulaire de  $\lambda^{(p)}$  et  $\partial_{\chi < 0} M'$  la réunion des composantes de  $\partial M'$  de caractéristique d'Euler strictement négative; on peut modifier  $f_\infty$  pour obtenir un homéomorphisme de  $\partial_{\chi < 0} M'$  dans  $S_\infty$ . Puisque cet homéomorphisme se prolonge en une équivalence d'homotopie de  $M'$  dans  $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ ,  $S_\infty$  est homologue à une réunion de tores correspondant aux pointes de rang 2 de  $\rho_\infty$ . La réunion de  $S_\infty$  et de ces tores borde donc un compact. Comme les pointes de rang 1 bordées par  $f_\infty(\partial_{\chi < 0} M - \lambda^{(p)}) - S_\infty$  et les pointes de rang 2 ont un volume fini, on a ainsi prouvé que  $f_\infty(\partial_{\chi < 0} M - \lambda^{(p)})$  borde un 3-cycle de volume fini. Chaque composante de  $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M)) - C$  étant un bout de volume infini (cf. [Ma]), ce 3-cycle est égal à  $C$ . Comme  $C$  est convexe, il contient le coeur de Nielsen  $N(\rho_\infty)$  de  $\rho_\infty(\pi_1(M))$  et  $\rho_\infty$  est géométriquement finie. Le bord de  $C$  étant une surface plissée, il est contenu dans  $N(\rho_\infty)$ . Les composantes de  $C - N(\rho_\infty)$ , si elles existent, sont donc des bouts de  $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M)) - N(\rho_\infty)$ . Or  $\rho_\infty$  est géométriquement finie donc de tels bouts ont un volume infini (cf. [Ma]) et ne peuvent pas être contenus dans  $C$ . On en déduit que  $C = N(\rho_\infty)$ .

Prolongeons  $f_\infty : \partial_{\chi < 0} M - \lambda^{(p)} \rightarrow N(\rho_\infty(\pi_1(M)))$  en une équivalence d'homotopie de  $(\text{int}(M) \cup \partial_{\chi < 0} M - \lambda^{(p)}, \partial_{\chi < 0} M - \lambda^{(p)})$  dans  $(N(\rho_\infty), \partial N(\rho_\infty))$ . Comme la restriction de cette équivalence d'homotopie à  $\partial_{\chi < 0} M - \lambda^{(p)}$  est un homéomorphisme, d'après [Wa3], elle est homotope à un homéomorphisme de  $\text{int}(M) \cup \partial_{\chi < 0} M - \lambda^{(p)}$  dans  $N(\rho_\infty)$ . Comme  $\rho_\infty$  est géométriquement finie, on peut modifier cet homéomorphisme pour obtenir un homéomorphisme de l'intérieur de  $M$  dans  $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ , ce qui fournit une métrique  $\sigma_\infty$  associée à  $\rho_\infty$ . Comme  $\sigma_\infty$  n'est pas nécessairement convexe cocompacte, on n'est pas tout à fait dans le cadre des résultats de [KeS] et [Bo4]. Néanmoins, comme les pointes de rang 1 de  $\sigma_\infty$  et des  $\sigma_n$  sont les mêmes pour tout  $n$ ,  $\sigma_\infty$  et  $\sigma_n$  sont conjuguées par un homéomorphisme quasi-conforme (cf. [JoM]), ce qui permet d'étendre les résultats de [KeS] et [Bo4] au cas qui nous occupe. On déduit donc de [KeS] ou [Bo4] que  $\lambda$  est la lamination mesurée de plissage de  $\sigma_\infty$ .  $\square$

## 5 Conclusion

Il ne nous reste plus qu'à montrer que pour toute lamination géodésique  $\lambda \in \mathcal{P}(M)$ , on peut trouver une suite de multi-courbes pondérées qui satisfont les conditions du lemme de fermeture (proposition 5). Ceci achèvera la preuve du théorème 1 que voici :

**Théorème 1.** *Soient  $M$  une variété hyperbolique compacte de dimension 3 et  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$  une lamination géodésique mesurée sur son bord. Il existe sur l'intérieur de  $M$  une métrique hyperbolique géométriquement finie non-fuchsienne  $\sigma$  dont  $\lambda$  est la lamination géodésique mesurée de plissage si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :*

- a) toute feuille fermée de  $\lambda$  a un poids inférieur ou égal à  $\pi$  ;
- b<sub>1</sub>) la lamination géodésique  $\lambda$  est annulaire ;
- c)  $i(\lambda, \partial D) > 2\pi$  pour tout disque essentiel  $D$ .

*Démonstration.* On a vu dans la section 3.1 que ces conditions sont nécessaires, montrons qu'elles sont suffisantes. Soit  $(\lambda_n)$  une suite de multi-courbes pondérées qui tend vers  $\lambda$  pour la topologie de  $\mathcal{ML}(\partial M)$  et dont les supports convergent géométriquement vers le support de  $\lambda$ . Si  $c$  est une feuille fermée de poids  $\pi$  de  $\lambda$ , d'après l'hypothèse de convergence géométrique des supports de  $\lambda_n$ , c'est, pour  $n$  assez grand, une feuille fermée de  $\lambda_n$ . On peut donc changer  $\lambda_n$  pour que  $c$  soit une feuille de poids  $\pi$  de  $\lambda_n$ . Afin de montrer que  $\lambda_n$  est la lamination

géodésique mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie sur  $M$ , nous allons prouver qu'elle vérifie les hypothèses du théorème 2 de [BoO].

Vérifions tout d'abord que pour  $n$  assez grand,  $\lambda_n$  ne contient pas de feuilles de poids supérieur à  $\pi$ . Supposons qu'il existe des  $n$  arbitrairement grands tels que  $\lambda_n$  ait une composante  $c_n$  de poids strictement supérieur à  $\pi$ . Comme  $\lambda_n$  converge vers  $\lambda$  dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$ , les courbes  $c_n$  doivent être égales à une courbe  $c$  de  $\lambda$  pour  $n$  assez grand et le poids de  $c$  est supérieur ou égal à  $\pi$ . D'après la condition a), le poids de  $c$  est exactement  $\pi$  et d'après le changement fait sur les  $\lambda_n$ , pour  $n$  assez grand  $c_n = c$  doit être une feuille de poids  $\pi$  de  $\lambda_n$  ce qui est contradictoire.

Montrons ensuite que pour tout disque essentiel  $D$ , et pour  $n$  assez grand,  $i(\lambda_n, \partial D) > 2\pi$ . Sinon, quitte à extraire, il existe une suite  $D_n$  de disques essentiels tels que  $i(\partial D_n, \lambda_n) \leq 2\pi$ . Si quitte à extraire, la suite  $D_n$  est constante alors il existe un disque essentiel  $D$  tel que  $i(\partial D, \lambda) \leq 2\pi$ , ce qui contredit la condition c). Sinon, quitte à extraire, la suite  $\partial D_n$  converge géométriquement vers un lamination géodésique  $\mu$  et on a vu dans la démonstration de l'affirmation 4.1 que  $\mu$  contient une feuille homoclinique  $l$  telle que  $i(l, \lambda) \leq 2\pi$ , ce qui contredit la condition  $c_1$ ).

Il ne reste plus qu'à prouver la condition 2 de [BoO]. Supposons que quitte à extraire, il existe une suite d'anneaux ou rubans de Möbius essentiels  $a_n$  tels que  $i(\partial a_n, \lambda_n) = 0$ . Quitte à extraire,  $\partial a_n$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $\alpha$  qui n'intersecte pas  $\lambda$ , d'après l'affirmation C.2,  $\alpha$  est annulaire, ce qui contredit la condition  $b_1$ ).

On a maintenant une suite de multi-courbes  $(\lambda_n)$  satisfaisant les hypothèses *ii*), *iii*), *iv*) et vérifiant :

- 1. toute feuille de  $\lambda_n$  a un poids inférieur à  $\pi$  ;
- 2.  $i(\lambda_n, \partial a) > 0$  pour tout anneau ou ruban de Möbius essentiel  $a$  de  $M$  ;
- 3.  $i(\lambda_n, \partial D) > 2\pi$  pour tout disque essentiel  $D$ .

Comme la multi-courbe  $\lambda_n$  vérifie les conditions du théorème 2 de [BoO], elle est la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique hyperbolique géométriquement finie  $\sigma_n$  sur l'intérieur de  $M$ . Toutes les condition du lemme de fermeture sont maintenant réunies. On en déduit que  $\lambda$  est la lamination géodésique mesurée de plissage d'un métrique hyperbolique géométriquement finie sur l'intérieur de  $M$  ce qui achève la preuve du théorème 1.  $\square$

## A Mesure de plissage et longueurs des géodésiques

**Lemme A.1 (Une courbe légèrement plissée est quasi- géodésique).** *Soient  $M$  une variété hyperbolique de dimension 3 dont le bord est une surface plissée convexe,  $\lambda$  la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\partial M$ ,  $\gamma$  une géodésique périodique du bord  $\partial M$  et  $\gamma^*$  la géodésique de  $M$  dans la classe d'homotopie de  $\gamma$ . Soit  $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ; il existe des constantes  $C_\varepsilon, A_\varepsilon$  telles que si  $i(\gamma, \lambda) \leq \varepsilon$  alors  $l_M(\gamma) \leq C_\varepsilon(l_M(\gamma^*) + A_\varepsilon)$ . De plus, on a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\varepsilon = 1$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = 0$ .*

*Démonstration.* Pour prouver ce lemme (voir aussi [Se]), nous allons construire, en deux étapes, un anneau simplicial de bord  $\gamma \cup \gamma^*$  et déduire, à chaque étape, de la formule de Gauss-Bonnet, des comparaisons de longueurs. La première étape est le lemme suivant :

**Lemme A.2.** *Soient  $\tilde{c}_1$  un segment géodésique de  $\partial\tilde{M}$  joignant deux points  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$  et  $\tilde{c}_2$  le segment géodésique de  $\tilde{M}$  qui les joint également. S'il existe  $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$  tel que  $i(\tilde{c}_1, p^{-1}(\lambda)) \leq \varepsilon$  alors  $\exists C_\varepsilon$  tel que  $l_M(\tilde{c}_1) \leq C_\varepsilon l_M(\tilde{c}_2)$  (avec  $C_\varepsilon \leq (1 + \tan \varepsilon)^3$ ).*

*Démonstration.* Remplaçons  $\tilde{c}_1$  par une approximation polyédrale pour laquelle l'angle total de plissage est inférieur à  $(1+x)\varepsilon < \frac{\pi}{2}$  (l'existence d'une telle approximation est prouvée dans [EpM]). Comme  $\tilde{c}_1$  est la limite de telles approximations, ceci nous permettra de conclure. Désormais  $\tilde{c}_1$  désignera l'approximation sus-citée. Le cône géodésique de  $\tilde{x}_1$  à  $\tilde{c}_1$  (i.e. l'adhérence de l'union des segments géodésiques joignant  $\tilde{x}_1$  aux points de  $\tilde{c}_1$ ) est un disque plissé  $\Delta$  formé d'un nombre fini de triangles totalement géodésiques et bordé par  $\tilde{c}_1 \cup \tilde{c}_2$ . Notons  $\varepsilon_1$  la somme des angles internes de ces triangles en  $\tilde{x}_1$  et  $\varepsilon_2$  l'angle interne du triangle en  $\tilde{x}_2$ . Comme  $\tilde{c}_1$  est une géodésique pour la métrique de  $\partial\tilde{M}$ , en chaque sommet de  $\tilde{c}_1$  la somme des angles internes des triangles est supérieure ou égale à l'angle interne de plissage de  $\partial\tilde{M}$ . En appliquant la formule de Gauss-Bonnet à chacun de ces triangles, on en déduit que l'aire de leur réunion est plus petite que  $(1+x)\varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ . On a alors  $\varepsilon_1 \leq (1+x)\varepsilon \leq 2\pi$ , donc le disque  $\Delta$  peut être plongé isométriquement dans  $\mathbb{H}^2$ . On notera désormais  $\Delta$  l'image de ce plongement munie de la métrique ambiante. La courbe  $\partial\Delta$  est une courbe géodésique par morceaux pour cette métrique et en chaque coin de  $\Delta - \tilde{c}_2$  l'angle externe (qui est compté négativement si l'angle interne est supérieur à  $\pi$ ) est inférieur à l'angle de plissage correspondant.

Soit  $b = \max_{\tilde{x} \in \partial\Delta - \tilde{c}_2} d_\Delta(\tilde{x}, \tilde{c}_2)$ ; l'affirmation suivante fournit une majoration de  $b$ .

**Affirmation A.3.** *On a  $chb \leq 1 + \tan((1+x)\varepsilon)$ .*

*Démonstration.* Par convexité de la fonction distance entre deux géodésiques,  $b$  est atteint en un sommet de  $\partial\Delta - \tilde{c}_2$ . Lorsque  $\Delta$  n'est pas convexe, nous allons le remplacer par un convexe dont le bord contient ce sommet.

Soient  $\tilde{y}$  un sommet de  $\Delta$  en lequel l'angle externe est négatif,  $\tilde{y}^+$  et  $\tilde{y}^-$  les deux sommets voisins de  $\tilde{y}$ ; ajoutons à  $\Delta$  le triangle de sommets  $\tilde{y}, \tilde{y}^+$  et  $\tilde{y}^-$ . Le disque  $\Delta'$  ainsi obtenu contient  $\Delta$ , est bordé par un polygone qui possède un sommet de moins que  $\partial\Delta$  et si l'angle externe de  $\Delta$  en  $\tilde{y}^+$  (respectivement  $\tilde{y}^-$ ) était positif alors l'angle externe de  $\Delta'$  en  $\tilde{y}^+$  (respectivement  $\tilde{y}^-$ ) est plus petit que celui de  $\Delta$ . Si ce nouveau disque a un coin en lequel l'angle externe est négatif alors on réitère cette opération.

Comme à chaque étape on enlève un coin, après un nombre fini d'itérations, on obtient un disque, que nous noterons  $\Delta'$ , tel qu'en chaque coin de  $\Delta'$  l'angle externe est positif. Un tel disque est convexe. Chaque coin de  $\Delta'$  est un coin de  $\Delta$  et, comme on l'a vu, l'angle externe de  $\Delta'$  en un coin est plus petit que l'angle externe de  $\Delta$  en ce même coin. On en déduit que

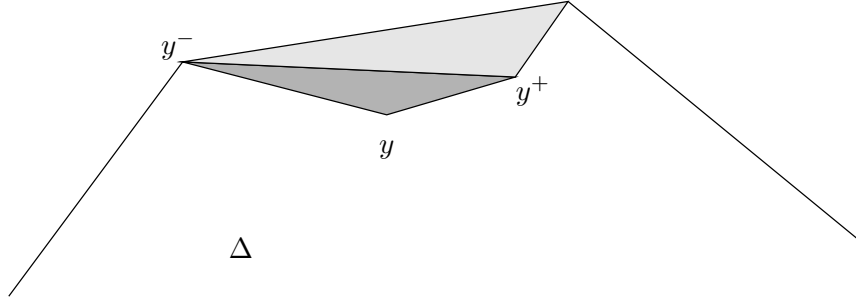


FIG. 5 – On ajoute des triangle à  $\Delta$  pour obtenir un convexe  $\Delta'$ .

la somme des angles externes de  $\Delta'$ , sans compter les angles en  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$  est plus petite que la mesure de plissage  $(1+x)\varepsilon$  de  $\tilde{c}_1$ . Si on note  $\varepsilon'_i$  l'angle interne de  $\Delta'$  en  $\tilde{x}_i$ , on a alors  $\text{aire}(\Delta') \leq (1+x)\varepsilon - (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)$ .

Comme les coins de  $\Delta'$  sont des coins de  $\Delta$  et que la fonction distance entre deux géodésiques est convexe, on a  $b = \max_{\tilde{x} \in \partial\Delta' - \tilde{c}_2} d_{\Delta'}(\tilde{x}, \tilde{c}_2)$ . Nous allons maintenant utiliser des formules de trigonométrie hyperbolique pour obtenir la majoration attendue.

Comme  $(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) \leq (1+x)\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ , la projection orthogonale de tout point de  $\partial\Delta'$

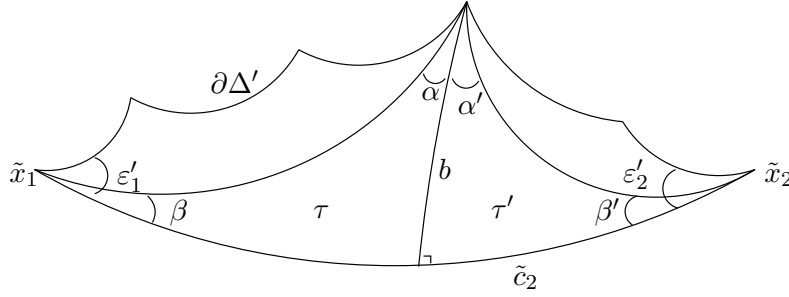


FIG. 6 – Le convexe  $\Delta'$ .

sur la géodésique passant par  $\tilde{x}_1$  et par  $\tilde{x}_2$  appartient au segment  $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]$ . Prenons les notations de la figure 6 et notons  $A$  l'aire du triangle  $\tau$ . On a  $A = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$  donc  $\cos \beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha - A) = \sin(\alpha + A)$ .

D'après ([Be]),  $\text{ch}b \sin \alpha = \cos \beta$  donc  $\text{ch}b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha+A)}{\sin \alpha} = \cos A + \cotan \alpha \sin A$ , d'où

$$\text{ch}b \leq 1 + \cotan \alpha. \quad (1)$$

Cette inégalité est encore vraie si l'on remplace  $\alpha$  par  $\alpha'$ .

Comme  $\text{aire}(\Delta') \leq (1+x)\varepsilon - (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)$ , alors

$$(1+x)\varepsilon \geq \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \geq \beta + \beta'.$$

De plus  $\pi - (\alpha + \alpha') - (\beta + \beta') = \text{aire}(\tau \cup \tau') \leq \text{aire}(\Delta') \leq (1+x)\varepsilon$  donc  $\alpha + \alpha' \geq \pi - (\beta + \beta') - (1+x)\varepsilon \geq \pi - 2(1+x)\varepsilon$ . On en déduit que  $\max\{\alpha, \alpha'\} \geq \frac{\pi}{2} - (1+x)\varepsilon$  (qui est strictement positif par hypothèse). En remplaçant dans (1), on obtient  $\text{ch}b \leq 1 + \cotan(\frac{\pi}{2} - (1+x)\varepsilon)$  d'où

$$\text{ch}b \leq 1 + \tan((1+x)\varepsilon) \quad (2)$$

□

Rappelons que les coordonnées de Fermi sont les coordonnées normales à une géodésique  $\tilde{d}$  (ici  $\tilde{d}$  est la géodésique contenant  $\tilde{c}_2$ ). Dans ces coordonnées, un point est repéré par sa distance  $\rho$  à  $\tilde{d}$  et par la distance  $t$  entre sa projection sur  $\tilde{d}$  et un point base fixé sur  $\tilde{d}$ . La métrique hyperbolique s'écrit dans ces coordonnées :

$$ds^2 = d\rho^2 + (\operatorname{ch} \rho)^2 dt^2.$$

Revenons à notre disque initial  $\Delta$  et montrons l'affirmation suivante :

**Affirmation A.4.** *La projection orthogonale de  $\tilde{c}_1$  sur  $\tilde{d}$  est injective.*

*Démonstration.* Comme  $\varepsilon_1 \leq (1+x)\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ , il existe un petit voisinage de  $\tilde{x}_1$  dans  $\tilde{c}_1$  sur lequel la projection orthogonale  $q : \tilde{c}_1 \rightarrow \tilde{d}$  est injective. Supposons que la projection orthogonale de  $\tilde{c}_1$  sur  $\tilde{d}$  n'est pas injective ; il existe alors un point  $\tilde{y} \in \tilde{c}_1$  tel que la projection orthogonale sur  $\tilde{d}$  est injective sur le segment  $[\tilde{x}_1, \tilde{y}]$  mais n'est injective sur aucun voisinage de  $\tilde{y}$  dans  $\tilde{c}_1$ . Soit  $\tilde{k} \subset \tilde{c}_1$  un arc géodésique ; alors ou bien  $q$  est injective sur  $\tilde{k}$ , ou bien l'image de  $\tilde{k}$  est un point. On en déduit que  $\tilde{y}$  est un sommet de  $\Delta$ . Notons  $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$  les deux côtés de  $\partial\Delta$  dont le bord contient  $\tilde{y}$  et  $(\tilde{y}, q(\tilde{y}))$  la géodésique orthogonale à  $\tilde{d}$  passant par  $\tilde{y}$ . Comme la projection n'est injective sur aucun voisinage de  $\tilde{y}$  dans  $\tilde{c}_1$ , les deux arcs  $\tilde{k}_1$  et  $\tilde{k}_2$  sont contenus dans la même composante de  $\mathbb{H}^2 - (\tilde{y}, q(\tilde{y}))$ . Notons  $\tilde{T}_i$  le triangle dont un sommet est  $\tilde{x}_1$  et dont un côté est  $\tilde{k}_i$  ; par construction de  $\Delta$ , les intérieurs de ces deux triangles  $\tilde{T}_1$  et  $\tilde{T}_2$  sont disjoints. On en déduit que  $\tilde{k}_2$  est contenu dans le disque  $D$  bordé par la réunion des arcs  $[\tilde{x}_1, q(\tilde{y})] \subset \tilde{c}_1$ ,  $[\tilde{x}_1, q(\tilde{y})] \subset \tilde{d}$  et de l'arc géodésique joignant  $\tilde{y}$  et  $q(\tilde{y})$  (cf. figure 7). Il s'en

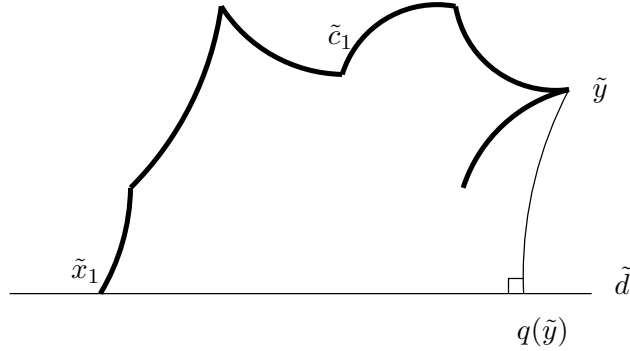


FIG. 7 – Si la projection orthogonale n'était pas injective

suit que l'angle externe de  $D$  en  $\tilde{y}$  est plus petit que l'angle externe de  $\Delta$  en  $\tilde{y}$ . La somme des angles externes de  $\partial D$ , sans compter les angles en  $\tilde{x}_1$  et en  $q(\tilde{y})$ , est donc inférieure à  $(1+x)\varepsilon$ . De la formule de Gauss Bonnet, on déduit alors que l'aire de  $D$  est plus petite que  $(1+x)\varepsilon - \varepsilon_1 - \frac{\pi}{2}$ . Ceci contredit l'hypothèse de départ  $(1+x)\varepsilon < \frac{\pi}{2}$  et conclut la preuve de l'affirmation.  $\square$

La projection orthogonale de  $\tilde{c}_1$  sur  $\tilde{d}$  étant continue, son image est un arc connexe. D'après l'affirmation A.4, les extrémités de cet arc sont  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$ . L'image de  $\tilde{c}_1$  par la projection orthogonale sur  $\tilde{d}$  est donc exactement  $\tilde{c}_2$ .

En intégrant les coordonnées de Fermi sur  $\tilde{c}_1$ , on obtient alors

$$l_M(\tilde{c}_1) = \int_0^{d_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)} \sqrt{(\rho'(t))^2 + \operatorname{ch}^2(\rho(t))} dt.$$

Pour en déduire une majoration de  $l_M(\tilde{c}_1)$ , il nous faut majorer  $\rho'(t)$ .

**Affirmation A.5.** Notons  $\tilde{x}(t)$  le point de  $\tilde{c}_1$  dont la projection sur  $\tilde{d}$  est le point de paramètre  $t$  (on choisit  $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_1$  donc  $t$  est la distance entre  $\tilde{x}_1$  et la projection de  $\tilde{x}(t)$  sur  $\tilde{d}$ ); alors si  $\rho$  est différentiable en  $t$ , on a

$$|\rho'| \leq (\sqrt{\tan^2((1+x)\varepsilon) + 1 - \text{ch}^{-2}\rho}) \text{ch}^2\rho.$$

*Démonstration.* Soit  $t$  tel que  $\rho$  est différentiable en  $t$ ; supposons tout d'abord que  $\rho'(t) \geq 0$ . Notons  $\tilde{d}$  la géodésique tangente en  $\tilde{x}(t)$  à  $\tilde{c}_1$ . Nous allons distinguer deux cas suivant que  $\tilde{d}$  intersecte  $\tilde{c}_2$  ou non.

- Si  $\tilde{d}$  n'intersecte pas le segment  $\tilde{c}_2$ , notons  $\tilde{d}'$  la demi-géodésique d'extrémité  $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_1$  qui contient  $\tilde{x}(t)$  et notons  $\delta$  l'angle entre  $\tilde{c}$  et  $\tilde{d}'$  (cf. figure 8). Si on considère que le point

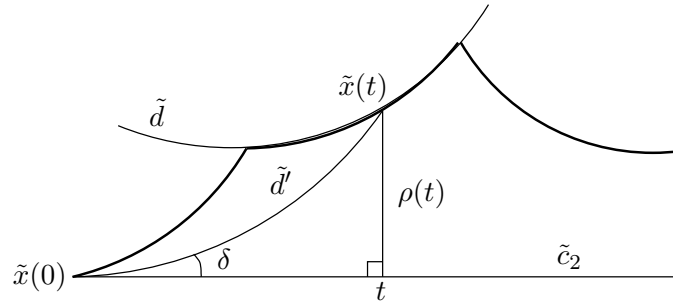


FIG. 8 – Majoration de  $\rho'$  premier cas.

$\tilde{x}(t)$  parcourt  $\tilde{d}'$  plutôt que  $\tilde{c}_1$ , on obtient une quantité  $\rho'(t)$  plus grande que celle cherchée. C'est ce  $\rho'$  que nous allons majorer.

D'après [Be], on a  $\text{th}\rho = \text{sh}t \tan \delta$ , d'où

$$\begin{aligned} \rho'(1 - \text{th}^2\rho) &= \text{cht} \tan \delta = (\sqrt{1 + \text{sh}^2t}) \tan \delta \\ &= \tan \delta \sqrt{1 + \frac{\text{th}^2\rho}{\tan^2\delta}} = \sqrt{\tan^2\delta + \text{th}^2\rho}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi  $\rho' = \frac{\sqrt{\tan^2\delta + \text{th}^2\rho}}{1 - \text{th}^2\rho} = (\sqrt{\tan^2\delta + \text{th}^2\rho}) \text{ch}^2\rho$  et il ne nous reste plus qu'à majorer  $\delta$ .

Si un voisinage de  $\tilde{x}(0)$  dans  $\tilde{d}'$  est contenu dans  $\Delta$  alors  $\delta \leq \varepsilon_1 \leq (1+x)\varepsilon$  (cf. figure 8). Sinon, il existe un point  $\tilde{y} \in \tilde{d}' \cap \tilde{c}_1$  tel que l'arc géodésique  $[\tilde{x}(0), \tilde{y}] \subset \tilde{d}'$  n'intersecte pas  $\tilde{c}_1$ . Notons  $D$  le disque plongé bordé par les arcs  $[\tilde{x}(0), \tilde{y}] \subset \tilde{d}'$ ,  $[\tilde{y}, \tilde{x}_2] \subset \tilde{c}_1$  et  $\tilde{c}_2$  (cf. figure 9); l'angle externe de  $D$  en  $\tilde{y}$  est plus petit que l'angle externe de  $\Delta$  (en particulier il est négatif, i.e. l'angle interne est supérieur à  $\pi$ , si  $\tilde{y}$  n'est pas un sommet de  $\Delta$ ), les autres coins sont des coins de  $\Delta$  et l'angle externe de  $D$  en chacun de ces coins, excepté  $\tilde{x}(0)$ , est celui de  $\Delta$ . On en déduit que l'aire de  $D$  est plus petite que  $(1+x)\varepsilon - \delta - \varepsilon_2$ , donc  $\delta \leq (1+x)\varepsilon$ .

On a alors

$$|\rho'| \leq \left( \sqrt{\tan^2((1+x)\varepsilon) + 1 - \text{ch}^{-2}\rho} \right) \text{ch}^2\rho.$$



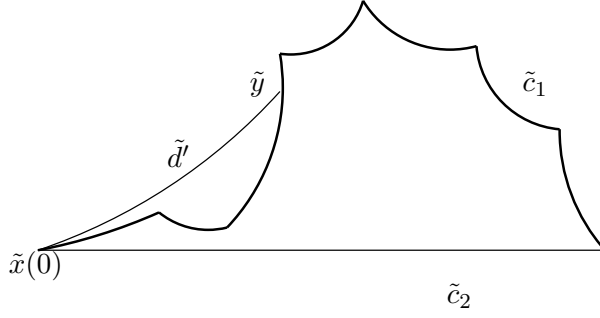


FIG. 9 – Majoration de  $\delta$ .

- Si  $\tilde{d}$  intersecte  $\tilde{c}_2$ , notons  $\delta$  l'angle entre  $\tilde{c}_2$  et  $\tilde{d}$  (cf. figure 10). Les calculs précédents nous donnent  $\rho' = \left( \sqrt{\tan^2 \delta + \text{th}^2 \rho} \right) \text{ch}^2 \rho$ .

Notons  $I_t$  l'intervalle  $[t, d_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)] \subset \mathbb{R}$  et considérons le disque  $\Delta_{\tilde{d}}$  bordé par la réunion de  $\{\tilde{c}_1(s), s \in I_t\}$ , de  $\{\tilde{x}(s), s \in I_t\}$  et du segment de  $\tilde{d}$  joignant  $\tilde{c}_2$  à  $\tilde{x}(t)$  (cf. figure 10). Les

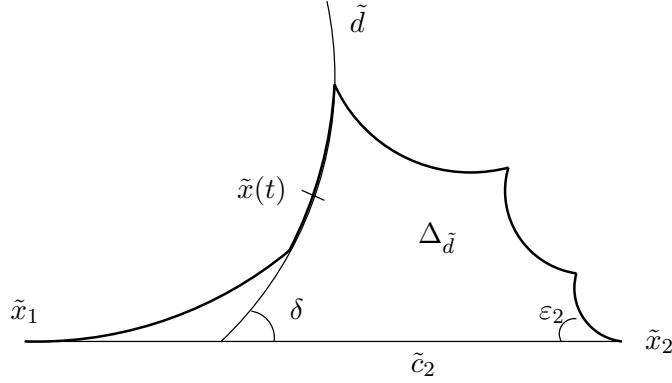


FIG. 10 – Majoration de  $\rho'$ , deuxième cas.

coins de  $\partial \Delta_{\tilde{d}} - \tilde{c}_2$ , excepté  $\tilde{d} \cap \tilde{c}_2$ , sont des coins de  $\tilde{c}_1$ . La somme des angles externes de  $\Delta_{\tilde{d}}$ , sans compter ceux en  $\tilde{d} \cap \tilde{c}_2$  et en  $\tilde{x}_2$ , est donc plus petite que  $(1+x)\varepsilon$ . On en déduit que :

$$\text{aire}(\Delta_{\tilde{d}}) \leq (1+x)\varepsilon - \delta - \varepsilon_2.$$

Il s'ensuit que  $\delta \leq (1+x)\varepsilon$  et on a nouveau

$$|\rho'| \leq \left( \sqrt{\tan^2((1+x)\varepsilon) + 1 - \text{ch}^{-2} \rho} \right) \text{ch}^2 \rho.$$

Ce raisonnement est valable tant que  $\rho(t)$  est croissante. Sur la partie où  $\rho(t)$  est décroissante, on remplace  $t$  par  $d_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - t$  et le même raisonnement fournit la même inégalité.  $\square$

De cette affirmation, on déduit que

$$\begin{aligned} l_M(\tilde{c}_1) &\leq \int_0^{d_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)} \sqrt{(1 + \tan^2((1+x)\varepsilon) - \text{ch}^{-2} \rho(t)) \text{ch}^4(\rho(t)) + \text{ch}^2(\rho(t))} dt \\ &\leq \text{ch}^2 b \sqrt{1 + \tan^2((1+x)\varepsilon)} d_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \end{aligned}$$

En combinant avec (2), on a alors

$$l_M(\tilde{c}_1) \leq (1 + \tan((1+x)\varepsilon))^2(1 + \tan((1+x)\varepsilon))d_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

Et en faisant tendre  $x$  vers 0 on en déduit

$$l_M(\tilde{c}_1) \leq (1 + \tan \varepsilon)^3 l_M(\tilde{c}_2) \quad (3)$$

□

Fin de la preuve du lemme A.1 :

Reprenons les notations de l'énoncé du lemme A.1 et notons  $g \in \pi_1(M)$  l'image de  $c \in \pi_1(\partial M)$  par l'application induite par l'inclusion  $\partial M \rightarrow M$ . Soient  $\tilde{c}^* \in \mathbb{H}^3$  l'axe de  $g$ ,  $x$  un point de  $c - \lambda$  et  $\tilde{x}_1 \in \tilde{c}$  et  $\tilde{x}_2 \in \tilde{c}$  deux relevés consécutifs (i.e. tels que  $\tilde{x}_2 = g\tilde{x}_1$ ) de  $x$ . Notons  $\tilde{c}_1$  le segment de  $\tilde{c} \subset \partial \tilde{M}$  joignant  $\tilde{x}_1$  à  $\tilde{x}_2$  et  $\tilde{c}_2$  le segment géodésique de  $\tilde{M}$  qui les joint aussi (on est dans la configuration de la figure 6). Notons enfin  $\tilde{y}_1$  et  $\tilde{y}_2$  les projections orthogonales de  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$  sur  $\tilde{c}^*$ ; on est alors dans la situation de la figure 11. Comme  $\tilde{c}$  est

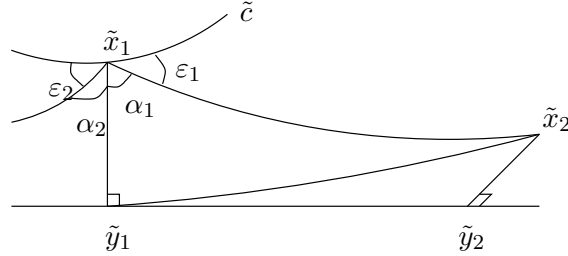


FIG. 11 – Configuration de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathbb{H}^3$ .

géodésique en  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geq \pi$ . Supposons que  $\alpha_2 \geq \alpha_1$  et notons  $\mathcal{R}$  la surface réunion des triangles géodésiques  $\tilde{y}_1\tilde{x}_1\tilde{x}_2$  et  $\tilde{x}_2\tilde{y}_1\tilde{y}_2$ . La métrique sur  $\mathcal{R}$  définie par la longueur des chemins est hyperbolique et  $\partial\mathcal{R}$  est un quadrilatère dont les angles en  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{y}_2$  sont  $\alpha_1$  et  $\frac{\pi}{2}$ , l'angle  $\beta$  en  $\tilde{y}_1$  est supérieur à  $\frac{\pi}{2}$  et l'angle  $\alpha$  en  $\tilde{x}_2$  vérifie  $\alpha \geq \alpha_2$ . On peut plonger  $\mathcal{R}$  dans  $\mathbb{H}^2$ ; dans la suite, nous identifierons  $\mathcal{R}$  et son image par ce plongement et c'est sur cette image que nous allons travailler. Prolongeons le segment  $[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2]$  en une géodésique infinie  $\tilde{e}$  et notons  $l$  la distance de  $\tilde{y}_1$  à la projection orthogonale de  $\tilde{x}_1$  sur  $\tilde{e}$  (voir figure 12).

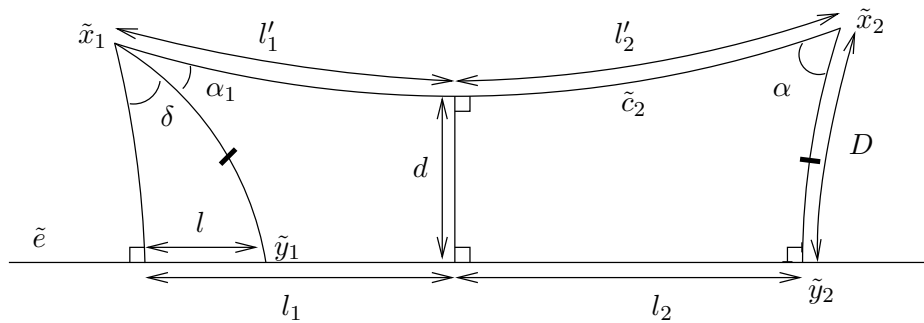
Notons  $D$  la distance de  $\tilde{x}_1$  à  $\tilde{y}_1$  (qui est aussi celle de  $\tilde{x}_2$  à  $\tilde{y}_2$ ). Comme  $2\alpha \geq \alpha_1 + \alpha_2 \geq \pi - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \geq \pi - (1+x)\varepsilon$ , alors  $\alpha \geq \frac{\pi}{2} - \frac{(1+x)\varepsilon}{2} > 0$ . Ceci entraîne l'existence de  $B_\varepsilon \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon = 0$  et que si  $D \geq B_\varepsilon$ , alors  $\tilde{c}_2$  n'intersecte pas  $\tilde{e}$ .

Si  $D \leq B_\varepsilon$ , on a  $l_M(\tilde{c}_2) \leq l_M(c^*) + 2B_\varepsilon$ . En combinant avec (3), on obtient  $l_M(c) \leq (1 + \tan \varepsilon)^3(l_M(c^*) + 2B_\varepsilon)$  et le lemme est prouvé.

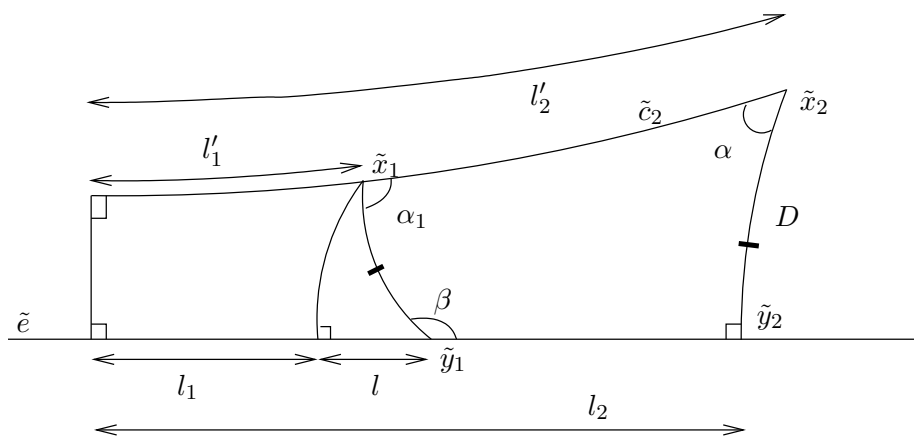
Dans le cas où  $D \geq B_\varepsilon$ , nous allons comparer la longueur de  $\tilde{c}_2$  avec la longueur  $l_M(c^*) = d(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$  d'un domaine fondamental pour  $g$  sur  $\tilde{c}^*$ .

**Affirmation A.6.** *Dans le cas où  $D \geq B_\varepsilon$ , on a*

$$l_M(\tilde{c}_2) \leq d(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) + l + 2 \operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right)}\right).$$



1<sup>er</sup> cas



2<sup>eme</sup> cas

FIG. 12 – Après qu'on ait déplié le quadrilatère  $\mathcal{R}$ .

*Démonstration.* Comme  $d(\tilde{x}_1, \tilde{e}) \leq d(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ ,  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ . On est donc dans l'une des situations de la figure 12, différenciées selon que le segment géodésique qui réalise la distance de  $\tilde{e}$  à la géodésique contenant  $\tilde{c}_2$  est contenu ou non dans  $\mathcal{R}$ .

Dans chacun des deux cas de la figure 12, on a  
 $\text{chl}_2 = \text{chl}'_2 \sin \alpha \geq \text{chl}'_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1+x}{2}\varepsilon) = \text{chl}'_2 \cos(\frac{1+x}{2}\varepsilon)$ , d'où  
 $\text{chl}'_2 \leq \frac{\text{chl}_2}{\cos(\frac{1+x}{2}\varepsilon)} \leq \text{ch}(l_2 + \text{argch}(\frac{1}{\cos(\frac{1+x}{2}\varepsilon)}))$ . On obtient ainsi

$$l'_2 \leq l_2 + \text{argch}\left(\frac{1}{\cos(\frac{1+x}{2}\varepsilon)}\right).$$

Dans le premier cas de la figure 12, comme la distance de  $\tilde{x}_1$  à  $\tilde{e}$  est inférieure à  $d(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = d(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ , l'angle  $\delta + \alpha_1$  est plus grand que  $\alpha$ . Les calculs ci-dessus fournissent donc

$$l'_1 \leq l_1 + \text{argch}\left(\frac{1}{\cos(\frac{1+x}{2}\varepsilon)}\right).$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient

$$l_M(\tilde{c}_2) \leq d(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) + l + 2 \text{argch}\left(\frac{1}{\cos(\frac{1+x}{2}\varepsilon)}\right).$$

Dans le deuxième cas, comme  $l_1 \leq l'_1$ , on a :

$$l_M(\tilde{c}_2) \leq l'_2 - l'_1 \leq l_2 + \text{argch}\left(\frac{1}{\cos(\frac{1+x}{2}\varepsilon)}\right) - l_1 \leq d(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) + l + \text{argch}\left(\frac{1}{\cos(\frac{1+x}{2}\varepsilon)}\right).$$

□

Il ne nous reste plus qu'à majorer  $l$ . Notons  $\mathcal{R}'$  le quadrilatère dont les sommets sont  $\tilde{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2$ ,  $\tilde{y}_2$  et le pied de la perpendiculaire à  $\tilde{e}$  passant par  $\tilde{x}_1$ . En calculant l'aire de  $\mathcal{R}'$  en intégrant les coordonnées de Fermi et en comparant avec la formule de Gauss-Bonnet, on obtient :

$$(l_M(c^*) + l)\text{sh}d \leq \iint_{\mathcal{R}'} \text{ch}\rho \, d\rho \, dt = \pi - \delta - \alpha_1 - \alpha \leq (1+x)\varepsilon. \quad (4)$$

D'après [Be], on a

$$\text{ch}d = \text{ch}D \sin \alpha \geq \text{ch}D \cos \frac{1+x}{2}\varepsilon$$

donc  $\text{ch}D \leq (\cos \frac{1+x}{2}\varepsilon)^{-1} \text{ch}d$ . Comme  $\pi - (\alpha_1 + \alpha + \delta) \geq 0$ ,  $\delta \leq \pi - (\alpha + \alpha_1) \leq (1+x)\varepsilon$ .

On en déduit que  $\text{sh}l = \text{sh}D \sin \delta \leq \text{sh}D \sin(1+x)\varepsilon$  donc

$$\begin{aligned} \text{sh}^2 l &\leq (\text{ch}^2 D - 1) \sin^2((1+x)\varepsilon) \leq \left(\frac{\text{ch}^2 d}{\cos^2(\frac{1+x}{2}\varepsilon)} - 1\right) \sin^2((1+x)\varepsilon) \\ &\leq 4(\text{sh}^2 d + \sin^2 \frac{1+x}{2}\varepsilon) \sin^2 \frac{1+x}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme  $(\text{sh}^2 d + \sin^2 \frac{1+x}{2}\varepsilon) \leq 2 \max\{\text{sh}^2 d, \sin^2 \frac{1+x}{2}\varepsilon\}$ , on a,

- ou bien  $\text{sh}^2 l \leq 8 \sin^4 \frac{1+x}{2}\varepsilon$  et  $l \leq \text{sh}l \leq 4 \sin^2 \frac{1+x}{2}\varepsilon \leq (1+x)^2 \varepsilon^2$ ;

- ou bien  $\text{sh}^2 l \leq 8 \text{sh}^2 d$  et  $l^2 \leq l \text{sh}l \leq 4l \text{sh}d \sin(\frac{1+x}{2}\varepsilon)$ . En utilisant (4), on en déduit

$$l^2 \leq 4 \left(\frac{(1+x)l\varepsilon}{l_M(c^*)+l}\right) \sin(\frac{1+x}{2}\varepsilon) \leq 2(1+x)^2 \varepsilon^2.$$

Finalement, on a

$$l \leq \text{Max}\{(1+x)^2 \varepsilon^2, \sqrt{2}(1+x)\varepsilon\} \leq (1+x)^2 (\sqrt{2}\varepsilon + \varepsilon^2).$$

En faisant tendre  $x$  vers 0 et en combinant avec (3), on obtient finalement

$$l_M(c) = l_M(\tilde{c}_1) \leq (1 + \tan \varepsilon)^3 (l_M(c^*) + 2 \operatorname{argch}(\frac{1}{\cos(\frac{\varepsilon}{2})} + \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2})).$$

□

## B Laminations géodésiques mesurées sur le bord des variétés de dimension 3

Nous avons vu que les limites de méridiens avaient un rôle important lorsqu'il s'agissait de contrôler la géométrie d'une variété à bord compressible (ceci étant un euphémisme au vu notamment des résultats de [Ot1] ou de [KIS]) et qu'un critère de Casson permettait de les caractériser. Nous allons donner ici la version plus faible de ce critère qui a été utilisée dans ce texte et dont on peut trouver une preuve pour le cas des bretzels dans [Ot1].

**Théorème B.1.** *Une lamination géodésique de  $\mathcal{M}_{geom}$  contient une feuille homoclinique.*

*Démonstration.* Nous allons reprendre et compléter la démonstration de [Ot1].

Soit  $(m_n)$  une suite de disques essentiels dont les bords  $\partial m_n$  convergent géométriquement vers une lamination géodésique  $\mu \in \mathcal{M}_{geom}$ . Soit  $\tilde{m}_n$  un relevé de  $m_n$  à  $\tilde{M}$ ; nous distinguerons deux cas suivant que la suite des diamètres des  $\partial \tilde{m}_n$  est bornée ou non.

Supposons que le diamètre des  $\partial \tilde{m}_n$  est majoré. Comme  $\rho(\pi_1(M))$  agit proprement sur  $\partial \tilde{M}$  avec un domaine fondamental compact, après application d'éléments de  $\rho(\pi_1(M))$ , les  $\partial \tilde{m}_n$  sont contenus dans un même compact de  $\partial \tilde{M}$ . Quitte à extraire,  $(\partial m_n)$  converge vers un relevé  $\tilde{\mu}$  de  $\mu$  contenu dans ce compact. Comme une lamination géodésique contenue dans un compact de  $\partial \tilde{M}$  contient une feuille homoclinique, ceci prouve l'affirmation dans le cas où le diamètre des  $\partial \tilde{m}_n$  est majoré.

Supposons maintenant que le diamètre de  $\partial \tilde{m}_n$  n'est pas majoré; quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que  $\operatorname{diam}(\partial \tilde{m}_n) \rightarrow \infty$ . Considérons une famille  $(D^i)$  de disques essentiels deux à deux non homotopes et de cardinalité maximale; ils découpent  $M$  en une réunion de pantalons  $P^l$  pleins et de variétés à bord incompressible. Le complémentaire dans  $\partial M$  de leurs bords  $(\partial D^i)$  est une réunion de pantalons et de surfaces  $\Sigma^l$  avec une seule composante de bord (d'après la maximalité de  $(D^i)$ ). Notons  $d_1 = \max_i \{ \max \{ d_{\tilde{M}}(x, y) / x, y \in p^{-1}(D^i) \} \}$  le maximum des diamètres des composantes  $p^{-1}(D^i)$  de  $p^{-1}(\bigcup_i D^i)$  et  $d_2$  le maximum des diamètres des pantalons pleins  $P^l$  de  $M - \bigcup_i D^i$ . Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage régulier de  $\bigcup_i D^i$ ; les adhérences des composantes connexes de  $m_n - \mathcal{V}$  qui ne sont pas contenues dans des pantalons pleins  $P^l$  sont des disques dont les bords sont contenus dans  $\bigcup_l \Sigma^l \cup \mathcal{V}$ .

Soient  $\tilde{\Delta}$  un relevé d'un tel disque et  $\tilde{C}$  la composante connexe de  $\tilde{M} - p^{-1}(\mathcal{V})$  qui contient  $\tilde{\Delta}$ ;  $\partial C = p(\partial \tilde{C})$  est une surface incompressible donc  $\partial \Delta$  borde un disque  $\Delta' \subset \partial C$ . Comme  $M$  est irréductible,  $\Delta \cup \Delta'$  borde une boule  $B \subset C$ . Soient  $\tilde{B}$  le relevé de  $B$  qui contient  $\tilde{\Delta}$  et  $\tilde{\Delta}'$  le relevé de  $\Delta'$  contenu dans  $\tilde{B}$ ; on a  $\partial \tilde{B} = \tilde{\Delta} \cup \tilde{\Delta}'$ . Soit  $\tilde{F}$  une composante connexe de  $\tilde{\Delta}' \cap \partial \tilde{M}$ ; notons  $\Sigma^l$  la composante de  $\partial M - \mathcal{V}$  qui intersecte  $p(\tilde{F})$ . Montrons que  $\tilde{F}$  est simplement connexe. Si ce n'est pas le cas,  $\partial \tilde{F}$  contient une courbe  $\tilde{c} \subset \partial \Sigma^l$ ; comme  $\Sigma^l$  n'a qu'une composante de bord,  $\partial \Sigma^l = p(\tilde{c})$ . Comme  $D_n$  n'est pas contenu dans une composante de  $M - \mathcal{V}$ ,  $c$  intersecte  $\Delta$  et  $\tilde{c}$  intersecte un translaté de  $\tilde{\Delta}$ . La boule  $B$  étant plongée,  $\tilde{B}$  est disjointe de ses translatés et  $\tilde{c} \subset \partial \tilde{B}$  n'intersecte pas de translaté de  $\tilde{\Delta} \subset \partial \tilde{B}$ . On en déduit que  $\tilde{F}$  est simplement connexe, c'est donc un disque et  $\tilde{F}$  est homotope à  $\tilde{\Delta}$  sur  $\partial \tilde{B}$ . Comme

$\tilde{F} \subset \tilde{\Delta}'$ , la restriction de  $p$  à  $\tilde{F}$  est un homéomorphisme. Le disque  $F = p(\tilde{F})$  est contenu dans la surface  $\Sigma^l$  donc son aire est inférieure à une constante  $A$  qui ne dépend que des types topologiques des  $\Sigma^k$  et l'aire de  $\tilde{F}$  est aussi majorée par  $A$ . Il existe donc une constante  $d_3$  qui ne dépend que de  $A$  et de  $d_1$  et une collection d'arcs  $\tilde{k}_n^j$  de  $\tilde{F}'$  dont les bords sont contenus dans  $(\partial\tilde{F} - \mathcal{V}) \subset \partial\tilde{m}_n$ , qui séparent  $\tilde{F}$  en des composantes de diamètre inférieur à  $d_3$  et vérifient  $l_{\tilde{M}}(\tilde{k}_n^j) \leq l_{\partial\tilde{M}}(\tilde{k}_n^j) \leq 3d_1$  (voir figure 13). On projette ensuite ces arcs sur des arcs  $\tilde{k}_n^j \subset \Delta$  qui ont les mêmes extrémités que les  $\tilde{k}_n^j$ .

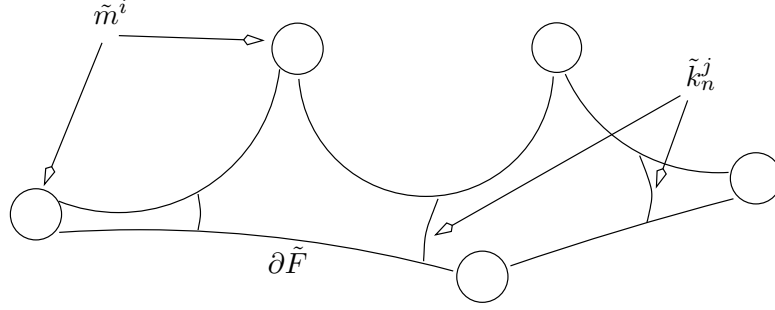


FIG. 13 – Un relevé de  $F$ .

On réalise cette construction pour chacune des composantes de  $\tilde{m}_n - \mathcal{V}$  et on ajoute aux  $\tilde{k}_n^j$  les composantes de  $p^{-1}(\bigcup_i D^i) \cap \tilde{m}_n$  pour construire une nouvelle famille  $\tilde{k}_n^j$  d'arcs dont les bords sont contenus dans  $\partial\tilde{m}_n$  et qui séparent  $\tilde{m}_n$  en des composantes connexes  $\mathcal{C}$  telles que  $\text{diam}(\partial\mathcal{C} - \bigcup_j \tilde{k}_n^j) \leq d = \max\{d_2, d_3\}$ .

Soient  $N$  un entier et  $n$  assez grand pour que  $\text{diam}(\partial\tilde{m}_i) \geq 2N + 2d$ . Soient  $\tilde{x}_n$  et  $\tilde{y}_n$  deux points de  $\partial\tilde{m}_n$  qui réalisent son diamètre. D'après la propriété de séparation des  $\tilde{k}_n^j$ , il existe un arc  $\tilde{k}_n^1$  dont les bords séparent  $\partial\tilde{m}_n$  en deux arcs  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  et  $\tilde{c}_{\tilde{y}_n}$  contenant respectivement  $\tilde{x}_n$  et  $\tilde{y}_n$  et dont l'un,  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  par exemple, vérifie les propriétés suivantes (illustrées par la figure 14) :

- la distance dans  $\tilde{M}$  entre les extrémités de  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  est inférieure à  $3d_1$  ;
- $N \leq d_{\tilde{M}}(\tilde{x}_n, \partial\tilde{c}_{\tilde{x}_n}) \leq N + d$ .

Si  $\text{diam}(\tilde{c}_{\tilde{x}_n}) \geq 2N + 2d$ , on réitère la même opération pour obtenir un nouvel arc  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}' \subset \tilde{c}_{\tilde{x}_n}$ .

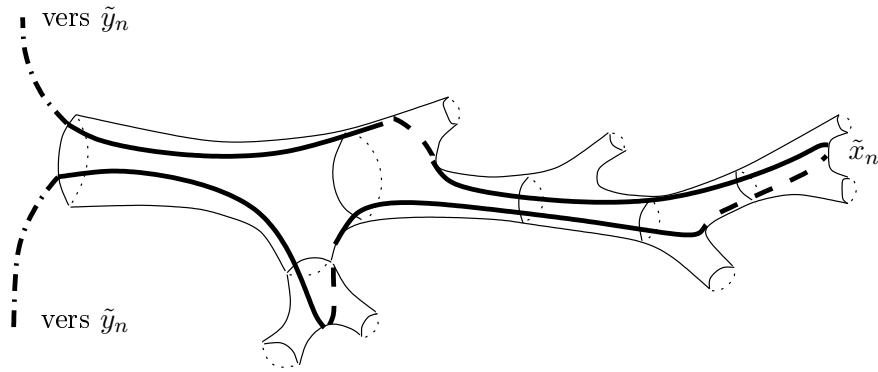


FIG. 14 – Un exemple d'arc  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  dans le cas d'un braid.

Comme  $\#\{\tilde{c}_{\tilde{x}_n}' \cap \bigcup_j \tilde{k}_n^j\} < \#\{\tilde{c}_{\tilde{x}_n} \cap \bigcup_j \tilde{k}_n^j\}$ , après un nombre fini d'itérations, on obtient un arc  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  tel que  $\text{diam}(\tilde{c}_{\tilde{x}_n}) \leq 2N + 2d$ . Après application d'un élément de  $\pi_1(M)$ , on peut supposer que les arcs  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  sont contenus dans un même compact de  $\partial\tilde{M}$ . Comme précédemment, si la suite des longueurs des  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  n'est pas bornée par une constante  $c(N)$ ,  $\mu$  contient une

feuille homoclinique. Dans le cas contraire, la suite des longueurs des  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  est bornée par une constante  $c(N)$ . Quitte à extraire une sous-suite, les arcs  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  convergent donc vers un arc dont les extrémités sont à une distance inférieure à  $3d_1$  et dont la longueur est minorée par  $N$  et majorée par  $c(N)$ , cet arc est contenu dans une feuille  $\tilde{l}$  de  $p^{-1}(\mu)$ . Par densité de la réunion des feuilles isolées d'un côté, on peut supposer la projection  $l$  de  $\tilde{l}$  de ce type. En faisant varier  $n$  on obtient une suite d'arcs dont la longueur tend vers l'infini. Comme les feuilles isolées d'un côté sont en nombre fini, quitte à extraire, on peut supposer les projections de ces arcs contenues dans un même feuille  $l$ . Une telle feuille  $l$  est homoclinique.  $\square$

## B.1 Systèmes admissibles de méridiens

Soit  $S \subset \partial M$  une surface compacte compressible dont le bord ne contient pas de méridiens; dans la section 2, nous avons défini un système admissible de méridiens de  $S$ , nous allons maintenant construire un tel système.

Soient  $\mu_1$  une réunion non séparante de méridiens de cardinalité maximale,  $M_1$  la variété obtenue en découpant  $M$  le long d'une famille de disques bordée par  $\mu_1$  et  $S_1 \subset \partial M_1$  la surface obtenue en découpant  $S$  le long de  $\mu_1$  et en recollant à la surface ainsi obtenue les disques bordés par les nouvelles composantes de bord ainsi formées. Si  $M_1$  est une boule, alors, comme  $\partial S$  ne contient pas de méridien,  $S_1 = \partial M_1$  et  $\mu$  est un système admissible. Sinon, si  $S - \mu$  contient un méridien  $c_1$  qui ne borde pas de disque de  $S_1$  (i.e. si  $S_1$  est compressible), notons  $\mu_2$  la multi-courbe obtenue en ajoutant un tel méridien à  $\mu_1$ . Soit  $M_2$  la variété en découpant  $M_1$  le long de  $c_1$  et  $S_2 \subset \partial M_2$  la surface obtenue en découpant  $S_1$  le long de  $c_1$  et en recollant à la surface ainsi obtenue les disques de  $\partial M_2$  que bordent les nouvelles composantes de bord ainsi formées. Si  $S_2$  n'est pas incompressible, on réitère cette opération. Comme le nombre de composantes d'une famille de géodésiques de  $S$ , simples, fermées et disjointes est bornée, après un nombre fini d'étapes, on obtient un système admissible de méridiens.

La première propriété des systèmes admissible que nous allons décrire est en fait une propriété générale des familles de méridiens. Soient  $\mu \subset S$  est une famille de méridiens,  $\mu^1 \subset \mu$  un élément de cette famille et  $k$  un arc de compression vers  $\mu^1$ ; notons  $(m^i)$  une famille de disques disjoints bordés par les composantes  $\mu^i$  de  $\mu$ . Comme  $k$  est un arc de compression vers  $\mu^1$ , il existe un arc  $k^1 \subset m^1$  tel que  $k \cup k^1$  borde un disque essentiel  $D \subset M$ . Les composantes de  $D - \bigcup_i m^i$  sont des disques dont l'un au moins, appelons-le  $D'$ , est tel que  $\partial D' \cap k$  est connexe. On en déduit que  $k$  contient un arc de compression  $\partial D' \cap k$  vers  $\mu$ . On a ainsi montré le fait suivant :

**Fait B.2.** *Soit  $\lambda \subset \partial M$  une lamination géodésique et  $\mu$  une famille de méridiens par rapport à laquelle  $\lambda$  est en position prétendue; alors pour chaque composante  $\mu^i$  de  $\mu$ ,  $\lambda$  ne contient pas d'arcs de compression vers  $\mu^i$ .*

Dans le cas d'un système admissible de méridiens, comme la surface  $S'$ , définie plus haut, est incompressible, on peut étendre ce fait de la manière suivante :

**Fait B.3.** *Soient  $S$  une surface compressible dont le bord ne contient pas de méridiens,  $\mu$  un système de méridiens admissible pour  $(M, S)$  et  $\lambda \subset S$  une lamination géodésique; si  $\lambda$  est en position prétendue par rapport à une multi-courbe contenant  $\mu$ , alors elle ne contient d'arc de compression vers aucune composante de  $\mu$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\lambda$  contient un arc  $k$  de compression vers  $\mu$ . Soit  $\mu^1$  la composante de  $\mu$  telle que  $\partial k \subset \mu^1$ ; il existe un arc  $k' \subset \mu^1$  tel que  $k \cap k' = \partial k = \partial k'$  et que

$k \cup k' \subset S'$  borde un disque de  $M'$ . Comme  $S'$  est incompressible,  $k \cup k'$  borde un disque de  $S'$  et pour toute multi-courbe  $\nu$  de  $S'$  qui intersecte  $k$ ,  $k$  contient un arc de compression vers  $\nu$ .  $\square$

Une autre propriété fort utile des systèmes admissibles est qu'en opérant sur eux des chirurgies le long d'arcs de compression, on obtient des systèmes qui sont eux aussi admissibles. Plus précisément soient  $\mu$  un système admissible pour une surface  $S \subset \partial M$ ,  $\mu^1$  une composante de  $\mu$  et  $k$  un arc de compression vers  $\mu^1$ . Par chirurgie de  $\mu^1$  le long de  $k$ , on obtient deux méridiens  $\mu_1^1$  et  $\mu_2^1$  tels que l'un des deux, disons  $\mu_2^1$ , a la propriété suivante : en remplaçant, dans  $\mu$ ,  $\mu^1$  par  $\mu_2^1$ , on a encore un système admissible (cf. [Wa2]).

## C Démonstration des propriétés de $\mathcal{P}(M)$

Dans cette dernière section, nous allons exposer les démonstrations des propriétés de  $\mathcal{P}(M)$  qui ont été utilisées dans la preuve du théorème 1.

**Lemme C.1.** *Soit  $\lambda$  une lamination vérifiant les conditions a) et c) ; alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $b_1$ ) *La lamination géodésique  $\lambda$  est anannulaire ;*
- $b_2$ )  *$\exists \eta > 0$  tel que, pour tout anneau essentiel  $a$ ,  $i(\partial a, \lambda) \geq \eta$ .*

*Démonstration.* Comme on l'a déjà remarqué, une lamination qui vérifie b),  $b_1$ ) ou  $b_2$ ) intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques. Dans la suite, nous pourrions donc supposer que  $\lambda$  intersecte toutes les courbes paraboliques.

i) Montrons tout d'abord par l'absurde que  $b_2 \Rightarrow b_1$ . Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui vérifie les conditions a), c) et intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques ; supposons que  $\lambda$  ne vérifie pas la condition  $b_1$ ). Il existe alors une lamination annulaire  $\alpha$  qui n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement et qui va nous permettre, pour tout  $\varepsilon > 0$ , de construire un anneau ou un ruban de Möbius essentiel  $a_\varepsilon$  tel que  $i(\lambda, \partial a_\varepsilon) \leq \varepsilon$ . Ceci contredira la condition  $b_2$ ).

Soient  $\tilde{l}^1, \tilde{l}^2 \subset p^{-1}(\alpha)$  deux feuilles biasymptotes ;  $\tilde{l}_+^1$  et  $\tilde{l}_+^2$  deux demi-géodésiques de  $\tilde{l}^1$  et  $\tilde{l}^2$  qui ont le même bout  $\xi_+$  ;  $l^1, l^2, l_+^1$  et  $l_+^2$  les projetés de  $\tilde{l}^1, \tilde{l}^2, \tilde{l}_+^1$  et  $\tilde{l}_+^2$  sur  $\partial M$ . Construisons tout d'abord une multi-courbe  $\mu$  qui est un méridien, une courbe parabolique ou le bord d'un anneau et par rapport à laquelle  $\tilde{l}_+^1$  et  $\tilde{l}_+^2$  sont en position prétendue. Soient  $\alpha^1$  et  $\alpha^2$  les laminations minimales contenues dans les adhérences  $\bar{l}_+^1$  et  $\bar{l}_+^2$  de  $l_+^1$  et  $l_+^2$ , avec éventuellement  $\alpha^1 = \alpha^2$  ; raccourcissons  $l_+^1$  et  $l_+^2$  de façon à avoir  $l_+^j \subset S(\alpha^j)$ . Comme  $\alpha^1 \cup \alpha^2 \subset \alpha$ , ni  $\alpha^1$ , ni  $\alpha^2$  n'intersectent  $\lambda$  transversalement et  $i(\partial \bar{S}(\alpha^1), \lambda) = i(\partial \bar{S}(\alpha^2), \lambda) = 0$ .

Si  $S = \bar{S}(\alpha^1) \cup \bar{S}(\alpha^2)$  contient un méridien ou une courbe parabolique, alors d'après le lemme 3.1,  $S$  contient un méridien ou une courbe parabolique  $\mu_+$  vers lequel  $S$  ne contient pas d'arcs de compression disjoint de  $\lambda$ . L'hypothèse que  $\lambda$  vérifie la condition c) et intersecte toutes les courbes paraboliques implique que  $\mu_+$  intersecte  $\lambda$  transversalement. Comme ni  $\alpha^1$ , ni  $\alpha^2$  n'intersecte  $\lambda$ , l'affirmation 2.8 entraînent que  $\mu_+$  intersecte transversalement  $\alpha^1$  ou  $\alpha^2$ . D'après l'affirmation 3.4, il existe une famille de fermés  $F_i \subset \partial \bar{M}$  bordés par les adhérences de relevés de  $\mu_+$  tels que  $\xi_+ = \bigcap_i \overset{\circ}{F}_i$ . Comme  $\xi_+$  est le bout de  $\tilde{l}_+^1$  et de  $\tilde{l}_+^2$ ,  $l_+^1$  et  $l_+^2$  intersectent  $\mu_+$ , donc  $\alpha^1 \cup \alpha^2$  est en position prétendue par rapport à  $\mu_+$  (chaque feuille intersecte transversalement  $\mu_+$ ).

Si  $S$  est incompressible et ne contient pas de courbes paraboliques, d'après la proposition



2, il existe un anneau ou ruban de Möbius essentiel  $a$  avec  $\mu_+ = \partial a \subset S$ . Si  $\mu_+$  n'intersecte pas  $\alpha^1 \cup \alpha^2$  transversalement, alors  $a$  est l'anneau ou le ruban de Möbius recherché. Sinon, comme  $S$  est incompressible,  $\alpha^1 \cup \alpha^2$  ne contient pas d'arc de compression vers  $\mu_+$  et par les mêmes arguments que lorsque  $\mu_+$  est un méridien,  $\alpha^1 \cup \alpha^2$  est en position prétendue par rapport à  $\mu_+$ .

Nous avons maintenant une multi-courbe  $\mu$  qui est un méridien, une courbe parabolique ou borde un anneau ou un ruban de Möbius essentiel et par rapport à laquelle  $l_+^1 \cup l_+^2$  est en position prétendue.

Considérons ensuite deux demi-feuilles  $\tilde{l}_+^1$  et  $\tilde{l}_+^2$  de  $\tilde{l}^1$  et  $\tilde{l}^2$  telles que  $\tilde{l}_+^1 \cap \tilde{l}_+^2 = \emptyset$  et  $\tilde{l}_+^1 \cap \tilde{l}_-^2 = \emptyset$ . En suivant un raisonnement analogue, on construit une multi-courbe  $\mu_-$  qui est un méridien, une courbe parabolique ou borde un anneau ou un ruban de Möbius essentiel et par rapport à laquelle  $l_-^1 \cup l_-^2$  est en position prétendue.

Paramétrons  $\tilde{l}^1$  et  $\tilde{l}^2$  par  $\mathbb{R}$  avec  $\tilde{l}_+^j \subset \tilde{l}^j(\mathbb{R}^+)$  et  $\tilde{l}_-^j \subset \tilde{l}^j(\mathbb{R}^-)$ . Considérons les suites  $\dots < x_{-1} < 0 < x_1 < \dots$  et  $\dots < y_{-1} < 0 < y_0 < y_1 < \dots$  de tous les réels tels que, pour tout  $n > 0$ ,  $\tilde{l}^1(x_n)$  et  $\tilde{l}^2(y_n)$  sont dans un même relevé de  $\mu_+$  et que  $\tilde{l}^1(x_{-n})$  et  $\tilde{l}^2(y_{-n})$  sont dans un même relevé de  $\mu_-$ . Comme  $l_+^1 \cup l_+^2$  est en position prétendue par rapport à  $\mu_+$ ,  $\tilde{l}_+^1$  (respectivement  $\tilde{l}_+^2$ ) intersecte au plus une fois chaque relevé de  $\mu_+$ . Cet argument est aussi valable pour  $l_-^1 \cup l_-^2$  et  $\mu_-$ , il existe donc  $N_0$  tel que pour  $n \geq N_0$ ,  $x_n, x_{-n}, y_n$  et  $y_{-n}$  sont bien définis, ce qui sera suffisant pour la suite. Notons  $d(l(x_n), l(y_n))$  la distance de  $l(x_n)$  à  $l(y_n)$  mesurée sur  $\mu^+$  (si  $\mu^+$  borde un anneau essentiel et si  $l(x_n)$  et  $l(y_n)$  appartiennent à deux composantes différentes de  $\mu^+$ , on conviendra que  $d(l(x_n), l(y_n)) = \infty$ ).

Supposons que, quitte à extraire,  $d(l(x_n), l(y_n)) \rightarrow 0$  et  $d(l(x_{-m}), l(x_{-m})) \rightarrow 0$  (en particulier,  $l^1$  et  $l^2$  sont contenues dans la même composante connexe de  $\partial M$ ). Pour simplifier les notations, on va considérer que  $m = n$ , mais le raisonnement qui suit est valable en toute généralité. Soient  $\eta > 0$  et  $\tilde{I}_n$  et  $\tilde{I}_{-n}$  deux segments de longueur inférieure à  $\eta$  joignant  $\tilde{l}^1(x_n)$  à  $\tilde{l}^2(y_n)$  et  $\tilde{l}^1(x_{-n})$  à  $\tilde{l}^2(y_{-n})$ . D'après la condition  $a$ ), pour  $\eta$  suffisamment petit, on a  $i(\tilde{I}_n, \tilde{\lambda}) + i(\tilde{I}_{-n}, \tilde{\lambda}) \leq 2\pi$ . La courbe  $\tilde{c}_n = \tilde{I}_n \cup \tilde{l}^1[x_{-n}, x_n] \cup \tilde{I}_{-n} \cup \tilde{l}^2[y_{-n}, y_n]$  est homotope à un point dans  $\tilde{M}$ . Montrons par l'absurde que pour  $n$  assez grand  $\tilde{c}_n$  ne borde pas de disque dans  $\partial \tilde{M}$ . Supposons qu'il existe une suite extraite telle que  $\tilde{c}_n$  borde un disque  $\tilde{D}_n \subset \partial \tilde{M}$ . Fixons  $n_0 \in \mathbb{N}$  et notons  $\tilde{\mu}_{n_0}^+$  la composante de  $p^{-1}(\mu^+)$  qui contient  $\tilde{l}^1(x_{n_0})$ . Soient  $\check{\mu}_{n_0}^+$  et  $\check{l}^1$  des relevés de  $\tilde{\mu}_{n_0}^+$  et  $\tilde{l}^1$  au revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de la composante de  $\partial M$  qui contient  $l^1$  et  $l^2$  tels que  $\check{\mu}_{n_0}^+$  et  $\check{l}^1$  s'intersectent en un point  $\check{x}_{n_0}$ . Pour  $n \geq n_0$ , relevons  $\tilde{D}_n$  en un disque  $\check{D}_n$  qui contient  $\check{x}_{n_0}$ . Le bord de  $\check{D}_n$  est composé d'un segment de  $\check{l}^1$ , d'un segment contenu dans un relevé  $\check{l}_n^2$  de  $\tilde{l}^2$  et de deux segments  $\check{I}_n$  et  $\check{I}_{-n}$  relevés de  $\tilde{I}_n$  et  $\tilde{I}_{-n}$ . Comme  $l(\check{I}_{\pm n}) \rightarrow 0$  et que la fonction distance entre deux géodésiques paramétrées par leurs longueurs est convexe,  $\check{\mu}_{n_0}^+$  intersecte  $\check{l}_n^2$  en un point  $\check{Y}_n$  tel que  $d(\check{l}^1(x_{n_0}), \check{Y}_n) \rightarrow 0$ . Comme  $l_+^2$  est en position prétendue par rapport à  $\mu^+$ ,  $\check{Y}_n$  se projette sur  $\tilde{l}^2(y_{n_0})$ . On en déduit que  $d(\tilde{l}^1(x_{n_0}), \tilde{l}^2(y_{n_0})) = 0$  ce qui contredit le fait que  $\tilde{l}^1$  et  $\tilde{l}^2$  sont disjointes. Pour  $n$  assez grands,  $c_n = p(\tilde{c}_n)$  représente donc un élément non nul de  $\pi_1(\partial M)$  et d'après le théorème du lacet ([He]) il existe alors un méridien  $\mu_n$  tel que  $i(\lambda, \mu_n) \leq 2\pi$  ce qui contredit  $c$ ).

On en déduit qu'il existe  $\eta > 0$  tel que  $d(l(x_n), l(y_n)) > \eta$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$  ou  $d(l(x_{-n}), l(x_{-n})) > \eta$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ . Considérons par exemple que  $d(l(x_n), l(y_n)) > \eta$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ . Nous allons modifier légèrement des arguments de G. Kleinedam et J. Souto [KIS] pour construire, pour  $\varepsilon$  donné un anneau ou un ruban de Möbius essentiel  $a_\varepsilon$  tel que  $i(\partial a_\varepsilon, \lambda) \leq \varepsilon$ .

Comme  $l_+^1 \cup l_+^2$  est en position prétendue par rapport à  $\mu_+$ , on a, pour tout  $i < j$  :

1. les vecteurs  $\frac{d}{dt} l_+^2(y_i)$  et  $\frac{d}{dt} l_+^1(x_i)$  sont dirigés du même côté de  $\mu_+$  (à savoir le côté du

fermé  $F_i$  du fait 3.4) ;

2. les courbes  $l_+^1[x_i, x_j]$  et  $l_+^2[y_i, y_j]$  représentent le même élément du  $\pi_1$  relatif  $\pi_1(M, \mu_+)$  (respectivement  $\pi_1(M, a)$  lorsque  $\mu_+$  borde un anneau ou ruban de Möbius  $a$ ).

Considérons tout d'abord le cas où  $\alpha^1$  est une courbe simple. Soit  $l$  une feuille de  $\alpha_2$  telle qu'un relevé  $\tilde{l}$  de  $l$  à  $\partial\tilde{M}$  a un bout  $\xi_+$  commun avec un relevé  $\tilde{\alpha}_2$  de  $\alpha_2$  et  $g$  un élément de  $\rho(\pi_1(M))$  qui laisse  $\tilde{\alpha}_2$  invariant et dont le point fixe répulsif est  $\xi^+$ . Les géodésiques  $g^n\tilde{l} \subset p^{-1}(l)$  ont deux bouts,  $g^n\xi^+ = \xi^+$  et  $\xi_n = g^n\xi^-$ , dans  $\partial\tilde{M}$  et  $(\xi_n)$  converge vers le point fixe attractif de  $g$ . On en déduit que, quitte à extraire,  $g^n\tilde{l}$  converge vers une géodésique simple  $\tilde{l}' \subset p^{-1}(\alpha^2)$  invariante par  $g$ . La feuille  $l' = p(\tilde{l}')$  est donc fermée et  $\alpha^2 = l'$ .

Si  $\alpha^1 = \alpha^2$ , alors, comme  $d(l_+^1(x_i), l_+^2(y_i)) > \eta$ ,  $\alpha^1$  borde un ruban de Möbius essentiel  $a$  avec  $i(\partial a, \lambda) = i(\alpha^1, \lambda) = 0$ . Sinon, il existe un anneau  $a$  éventuellement singulier avec  $\partial a = \alpha^1 \cup \alpha^2$  et d'après [ShW], il existe un anneau essentiel  $a'$  tel que  $i(\partial a', \lambda) = 0$ .

Si  $\alpha^1$  n'est pas une courbe simple, d'après ce qui précède,  $\alpha^1$  et  $\alpha^2$  sont des minimaux exceptionnels. Ils contiennent donc au moins une feuille qui n'est isolée d'aucun côté. On a alors l'affirmation suivante :

**Affirmation C.1.** *Pour tout  $\varepsilon' > 0$ , il existe  $i < j$  tels que l'on ait l'un des deux cas suivants :*

*Cas I :*

- $d(l_+^1(x_i), l_+^2(x_{\varphi(i+1)})) < \varepsilon'$  et  $d(l_+^2(y_i), l_+^1(y_j)) < \varepsilon'$  ;
- les vecteurs  $\frac{d}{dt}l_+^1(x_i)$  et  $\frac{d}{dt}l_+^1(x_j)$  sont dirigés du même côté de  $\mu_+$  ;
- $\forall k \in \{i + 1, \dots, j - 1\}$ ,  $l_+^1(x_k)$  et  $l_+^2(y_k)$  n'appartiennent pas à  $[l_+^2(x_i), l_+^2(x_j)] \cup [l_+^2(y_i), l_+^2(y_j)] \subset \mu$ .

*Cas II :*

- $d(l_+^1(x_i), l_+^2(y_j)) < \varepsilon'$  et  $d(l_+^2(y_i), l_+^1(x_j)) < \varepsilon'$  ;
- les vecteurs  $\frac{d}{dt}l_+^1(x_i)$  et  $\frac{d}{dt}l_+^1(y_j)$  sont dirigés du même côté de  $\mu_+$  ;
- $\forall k \in \{i + 1, \dots, j - 1\}$ ,  $l_+^1(x_k)$  et  $l_+^2(y_k)$  n'appartiennent pas à  $[l_+^1(x_i), l_+^2(y_j)] \cup [l_+^2(y_i), l_+^1(x_j)] \subset \mu$ .

Notons que ce cas n'apparaît que si  $l^1$  et  $l^2$  sont dans la même composante de  $\partial M$ .

*Démonstration.* Pour trouver un tel couple  $i < j$ , on procède de la manière suivante. Comme  $\alpha^1$  contient une feuille qui n'est isolée d'aucun côté, il existe un point  $x \subset \alpha^1 \cap \mu_+$  tel qu'une suite de points de  $l_+^1 \cap \mu$  situés "à gauche" de  $x$  converge vers  $x$  et qu'une suite de points de  $l_+^2 \cap \mu$  situés "à droite" de  $x$  converge aussi vers  $x$ . Considérons deux points  $a = l_+^1(x_l)$  ou  $l_+^2(y_l)$  et  $b = l_+^1(x_s)$  ou  $l_+^2(y_s)$  situés de part et d'autre de  $x$  et tels que  $d(a, b) < \varepsilon'$  et que  $\forall k \in \{l + 1, \dots, s - 1\}$ ,  $l_+^1(x_k)$  et  $l_+^2(y_k)$  n'appartiennent pas à  $[a, b] \subset \mu$ . Si les vecteurs  $\frac{d}{dt}(l^1 \cup l^2)|_a$  et  $\frac{d}{dt}(l^1 \cup l^2)|_b$  sont dirigés du même côté de  $\mu_+$ , alors on prend  $i = l$  et  $j = s$ . Sinon il existe un point  $c = l_+^1(x_t)$  ou  $l_+^2(y_t)$  de  $[a, b]$  tel que  $\forall k \in \{l + 1, \dots, t - 1\} - \{s\}$ ,  $l_+^1(x_k)$  et  $l_+^2(y_k)$  n'appartiennent pas à  $[a, b]$ . On prend alors  $j = t$  et  $i = l$  si les vecteurs  $\frac{d}{dt}(l^1 \cup l^2)|_a$  et  $\frac{d}{dt}(l^1 \cup l^2)|_c$  sont dirigés du même côté de  $\mu_+$  et  $i = s$  sinon. L'adhérence de  $\tilde{l}^1 \cup \tilde{l}^2$  dans  $\partial\tilde{M}$  est une courbe de Jordan et deux translats distincts de  $\tilde{l}^1 \cup \tilde{l}^2$  ne s'intersectent pas, montrons que deux translats distincts de l'adhérence de  $\tilde{l}^1 \cup \tilde{l}^2$  ne s'intersectent pas. Supposons le contraire, soient  $g(\tilde{l}^1 \cup \tilde{l}^2)$  et  $h(\tilde{l}^1 \cup \tilde{l}^2)$  deux translats de  $\tilde{l}^1 \cup \tilde{l}^2$  dont les adhérences s'intersectent ; comme  $g(\tilde{l}^1 \cup \tilde{l}^2)$  et  $h(\tilde{l}^1 \cup \tilde{l}^2)$  ne s'intersectent pas, alors  $g(\tilde{l}^1)$  et  $h(\tilde{l}^1)$  ont les deux mêmes bouts. On en déduit que  $(gh^{-1})^2$  fixe les deux bouts de  $g(\tilde{l}^1)$ . Quitte à extraire la suite  $(gh^{-1})^{2n}g(\tilde{l}^1)$  converge vers une géodésique  $\tilde{\gamma} \subset p^{-1}(\alpha^1)$  dont la projection  $l \subset \partial M$  est une courbe fermée.

Ceci contredit l'hypothèse que  $\alpha^1$  est un minimal exceptionnel donc deux translatés distincts de l'adhérence de  $\tilde{l}^1 \cup \tilde{l}^2$  ne s'intersectent pas. Ceci permet de montrer que, dans chacun des deux cas, la troisième propriété est vérifiée.  $\square$

Comme l'illustre la figure 15, ce couple  $i, j$  va nous permettre de construire l'anneau ou le ruban de Möbius essentiel  $a_\varepsilon$  cherché.

Comme  $l^1 \cup l^2$  n'intersecte pas  $\lambda$ , alors  $\exists \zeta(\lambda)$  tel que si, pour  $k = 1$  ou  $2$ ,  $l_+^k$  contient un

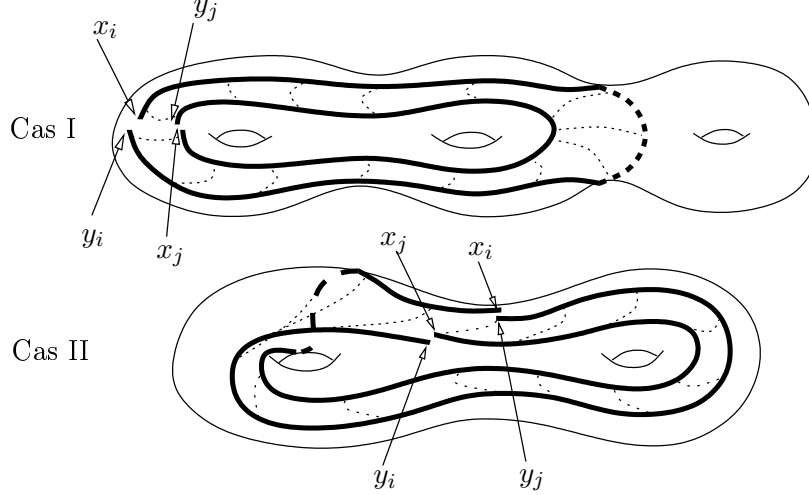


FIG. 15 – Un exemple pour chacun des deux cas possibles

point à distance inférieure à  $\zeta(\lambda)$  d'une feuille fermée  $\lambda^t$  de  $\lambda$ , alors ou bien  $l^k = \lambda^t$ , ou bien  $l_+^k$  spirale sur  $\lambda^t$ .

Dans le cas I, comme  $\alpha^1$  n'est pas une géodésique fermée, pour  $\varepsilon' < \zeta(\lambda)$ , ni  $[l_+^1(x_i), l_+^1(x_j)]$ , ni  $[l_+^2(y_i), l_+^2(y_j)]$  n'intersectent de feuille fermée de  $\lambda$ . On en déduit que pour  $\varepsilon'$  suffisamment petit,  $i([l_+^1(x_i), l_+^1(x_j)], \lambda) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et  $i([l_+^2(y_i), l_+^2(y_j)], \lambda) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . D'après un résultat de [ShW], les courbes simples  $l_+^1[x_i, x_j] \cup [l_+^1(x_i), l_+^1(x_j)]$  et  $l_+^2[y_i, y_j] \cup [l_+^2(y_i), l_+^2(y_j)]$  bordent un anneau  $a_\varepsilon$  (cf. figure 15) tel que  $i(\partial a_\varepsilon, \lambda) \leq \varepsilon$ . Comme les vecteurs  $\frac{d}{dt} l_+^1(x_i)$  et  $\frac{d}{dt} l_+^1(x_j)$  sont dirigés du même côté de  $\mu_+$ , pour  $\varepsilon'$  suffisamment petit, les courbes simples  $\partial^1 a_\varepsilon = l_+^1[x_i, x_j] \cup [l_+^1(x_i), l_+^1(x_j)]$  et  $\partial^2 a_\varepsilon = l_+^2[y_i, y_j] \cup [l_+^2(y_i), l_+^2(y_j)]$  sont des quasi géodésiques de  $\partial M$ . Soit  $\tilde{a}_\varepsilon \subset \tilde{M}$  un relevé de  $a_\varepsilon$  et  $\tilde{\partial}^1 a_\varepsilon$  et  $\tilde{\partial}^2 a_\varepsilon$  les deux composantes de son bord. Comme  $\tilde{\partial}^j a_\varepsilon$  est une quasi-géodésique de  $\partial \tilde{M}$ , elle est uniformément proche (en fonction de  $\varepsilon'$ ) d'une géodésique  $\tilde{c}^j$  de  $\partial \tilde{M}$ . L'hypothèse  $d(l_+^1(x_i), l_+^2(y_i)) > \eta$  entraîne donc que  $\tilde{c}^1 \neq \tilde{c}^2$  et que  $a_\varepsilon$  est un anneau essentiel.

Dans le cas II, comme  $\alpha^1$  n'est pas une géodésique fermée, pour  $\varepsilon' < \zeta(\lambda)$ ,  $i([l_+^1(x_i), l_+^2(y_j)], \lambda) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et  $i([l_+^2(y_i), l_+^1(x_j)], \lambda) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . La courbe  $\gamma = l_+^1[x_i, x_j] \cup [l_+^1(x_i), l_+^2(y_i)] \cup l_+^2[y_i, y_j] \cup [l_+^2(y_j), l_+^1(x_i)]$  borde un ruban de Möbius  $a_\varepsilon$  (éventuellement singulier) tel que  $i(\partial a_\varepsilon, \lambda) \leq \varepsilon$ . Pour les raisons évoquées dans le premier cas, ce ruban de Möbius est essentiel. Comme  $M$  est orientable, il existe deux copies disjointes de  $\gamma$  et ces deux copies bordent un anneau (éventuellement singulier). D'après [ShW], ces deux copies bordent un anneau non singulier  $a_{2\varepsilon}$  tel que  $i(\lambda, \partial a_{2\varepsilon}) \leq 2\varepsilon$ .

On a montré dans les deux cas que pour tout  $\varepsilon$ , il existe un anneau essentiel  $a$  tel que  $i(\partial a, \lambda) \leq \varepsilon$  ce qui contredit la condition  $b_2$ .

ii) Afin de montrer  $b_1) \Rightarrow b_2)$  par l'absurde, nous allons prouver un résultat un peu plus fort qui nous sera utile par la suite. Une limite géométrique de bords d'anneaux n'est pas toujours annulaire, toutefois, on a :

**Lemme C.2.** *Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui satisfait la condition c) et intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques ; soit  $(\alpha_n)$  une suite de multi-courbes telle que  $\alpha_n$  borde un anneau ou un ruban de Möbius essentiel et que  $(\alpha_n)$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $\alpha$  qui n'intersecte pas  $\lambda$  ; alors  $\alpha$  est annulaire (en particulier  $\lambda$  n'est pas annulaire).*

*Démonstration.* Notons  $S(\alpha)$  la réunion des surfaces embrassées par les composantes connexes de  $\alpha$ .

Si  $S(\alpha)$  est incompressible et ne contient pas de courbes paraboliques ; alors les  $\alpha_n$  sont des laminations annulaires. Soient  $\tilde{S}(\alpha) \subset \partial\tilde{M}$  un relevé de  $S(\alpha)$  et  $\tilde{F}$  un domaine fondamental pour l'action de  $\pi_1(S(\alpha))$  sur  $\tilde{S}(\alpha)$ . Soient  $\tilde{l}_n^1$  et  $\tilde{l}_n^2$  deux feuilles biasymptotes de  $p^{-1}(\alpha_n)$  telles que  $\tilde{l}_n^1$  intersecte  $\tilde{F}$  ; quitte à extraire, on peut supposer que la suite  $(\tilde{l}_n^1)$  converge vers un relevé  $\tilde{l}^1$  d'une feuille  $l^1$  de  $\alpha$ . D'après l'affirmation 2.2, quitte à extraire, les  $\tilde{l}_n^1$  (respectivement  $\tilde{l}_n^2$ ) sont contenus dans un même relevé  $\tilde{S}(\alpha) \subset \partial\tilde{M}$  (respectivement  $\tilde{S}(\alpha)'$ ). Comme les bouts des  $\tilde{l}_n^2$  convergent vers les bouts de  $\tilde{l}^1 \subset \tilde{S}(\alpha)$ , alors la suite  $(\tilde{l}_n^2)$  converge vers le relevé  $\tilde{l}^2 \subset \tilde{S}(\alpha)'$  d'une feuille  $l^2$  de  $\alpha$  qui a les mêmes bouts que  $\tilde{l}^1$ . Si  $\tilde{S}(\alpha) = \tilde{S}(\alpha)'$  alors  $\tilde{l}_n^1$  et  $\tilde{l}_n^2$  sont contenus dans  $\tilde{S}(\alpha)$ . Mais ceci contredit le fait que l'adhérence de  $\tilde{S}(\alpha)$  dans  $\tilde{M}$  est un disque (affirmation 2.1) donc  $\tilde{S}(\alpha) \neq \tilde{S}(\alpha)'$  et  $\tilde{l}^2 \neq \tilde{l}^1$ . On en déduit que  $\alpha$  est une lamination géodésique annulaire.

Si  $S(\alpha)$  est compressible ou contient une courbe parabolique, d'après le lemme 3.2, il existe une multi-courbe  $\gamma$  par rapport à laquelle  $\alpha$  est en position prétendue et telle que  $\gamma$  contient un système admissible de méridiens  $\mu$  ou une courbe parabolique  $\mu$  (la suite de la preuve étant la même dans les deux cas, on a donné le même nom au système admissible et à la courbe parabolique). Comme  $\alpha$  est en position prétendue par rapport à  $\gamma$ , pour  $n$  assez grand  $\partial a_n$  est également en position prétendue par rapport à  $\gamma$ . D'après le fait 3.4,  $\partial a_n$  n'est donc pas une courbe parabolique. Si la longueur des composantes de  $\partial a_n - \gamma$  n'est pas bornée ; il existe une suite d'arcs  $(k_n) \subset \partial a_n - \gamma$  tels que  $l(k_n) \rightarrow \infty$ . Une valeur d'adhérence pour la topologie de Hausdorff de cette suite d'arcs contient une lamination géodésique qui n'intersecte pas  $\gamma$ , ce qui contredit le fait que  $\alpha$  est en position prétendue par rapport à  $\gamma$ . Il existe donc une constante  $K$  qui majore la longueur des composantes de  $\partial a_n - \gamma$ . Soit  $\mu^1$  une composante de  $\mu$  ; d'après les hypothèses faites sur  $\lambda$ ,  $\lambda$  intersecte transversalement  $\mu^1$ . Comme  $\alpha$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement,  $\lambda \cap S(\alpha) \subset \alpha$ . Une composante minimale de  $\alpha$  intersecte donc  $\mu^1$  transversalement. Soient  $l$  une feuille de cette composante minimale (en particulier  $l$  est une feuille récurrente de  $\alpha$  qui intersecte  $\mu^1$  transversalement) et  $\tilde{l}$  un relevé de  $l$  à  $\partial\tilde{M}$ , notons  $(\tilde{\gamma}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  les composantes de  $p^{-1}(\gamma)$  que  $\tilde{l}$  intersecte successivement. Notons  $\tilde{l}[-t, t]$  le segment de  $l$  qui joint  $\tilde{\gamma}_{-t}$  et  $\tilde{\gamma}_t$ . Comme  $\partial a_n$  converge géométriquement vers  $\alpha$ , pour  $n$  assez grand une composante  $\partial^1 \tilde{a}_n$  de  $p^{-1}(\partial a_n)$  intersecte  $\tilde{\gamma}_{-t}$  et  $\tilde{\gamma}_t$  et  $\partial^1 \tilde{a}_n[-t, t]$  converge pour la topologie de Hausdorff vers  $\tilde{l}[-t, t]$ . Soit  $\tilde{a}_n$  le relevé de  $a_n$  bordé par  $\partial^1 \tilde{a}_n$  ; montrons que  $\partial^2 \tilde{a}_n = \partial \tilde{a}_n - \partial^1 \tilde{a}_n$  intersecte aussi  $\tilde{\gamma}_t$  et  $\tilde{\gamma}_{-t}$ .

Comme les arguments sont les mêmes pour  $\tilde{\gamma}_t$  et  $\tilde{\gamma}_{-t}$ , nous allons le montrer seulement pour  $\tilde{\gamma}_t$ . D'après le fait B.3,  $\partial a_n$  est en position prétendue par rapport à  $\mu$ . Si  $p(\tilde{\gamma}_t) \subset \mu$ , alors, de la preuve du fait 3.4, on déduit que  $\tilde{\gamma}_t$  sépare les deux bouts de  $\partial^1 \tilde{a}_n$  et donc que  $\partial^2 \tilde{a}_n$  intersecte  $\tilde{\gamma}_t$ . Si  $p(\tilde{\gamma}_t)$  n'est pas un méridien ni une courbe parabolique, comme  $l$  est récurrente et intersecte  $\mu^1$  transversalement, il existe  $\tilde{\gamma}_{t_1}$  et  $\tilde{\gamma}_{t_2}$  tels que  $t_1 < t < t_2$  et que

pour  $s \subset [t_1, t_2]$ ,  $p(\tilde{\gamma}_s) \subset \mu \Leftrightarrow s \subset \{t_1, t_2\}$ . Pour  $n$  assez grand,  $\partial^1 \tilde{a}_n$  intersecte  $\tilde{\gamma}_{t_1}$  et  $\tilde{\gamma}_{t_2}$ , donc  $\partial^2 \tilde{a}_n$  les intersectent aussi et les composantes bornées  $k^1$  et  $k^2$  de  $\partial^1 \tilde{a}_n - (\tilde{\gamma}_{t_1} \cup \tilde{\gamma}_{t_2})$  et  $\partial^2 \tilde{a}_n - (\tilde{\gamma}_{t_1} \cup \tilde{\gamma}_{t_2})$  sont homotopes dans  $\tilde{M}$  relativement à  $\tilde{\gamma}_{t_1} \cup \tilde{\gamma}_{t_2}$ . Notons  $S'$  la surface obtenue en découpant  $S$  le long de  $\mu$  et en recollant le long de chaque composante de bord ainsi formée un disque de  $M$  qu'elle borde. Comme  $\mu$  est une système admissible, la surface  $S'$  ainsi construite est soit une sphère, soit une surface incompressible. D'après la remarque qui suit le lemme 3.1, si  $S'$  est une sphère, on peut prendre  $\gamma = \mu$  et l'étude précédente du cas  $p(\tilde{\gamma}_t) \subset \mu$  suffit pour conclure. Si  $S'$  est une surface incompressible,  $k^1$  et  $k^2$  sont homotopes dans  $p^{-1}(S')$  relativement à  $\tilde{\gamma}_{t_1} \cup \tilde{\gamma}_{t_2}$ . Comme  $\gamma$  ne contient pas d'arc de compression vers  $\alpha$ , si  $\tilde{\gamma}_t$  intersecte  $k^1$ , alors il intersecte aussi  $k^2$ .

On vient de prouver que  $\partial^2 \tilde{a}_n$  intersecte aussi  $\tilde{\gamma}_{-t}$  et  $\tilde{\gamma}_t$ ; comme la longueur de  $\partial^2 \tilde{a}_n[-t, t]$  est plus petite que  $2tK$ , alors, quitte à extraire,  $\partial^2 \tilde{a}_n[-t, t]$  converge pour la topologie de Hausdorff vers un arc  $\tilde{l}'[-t, t] \subset p^{-1}(\alpha)$ . En faisant tendre  $t$  vers l'infini, on en déduit que  $\tilde{l}$  et  $\tilde{l}'$  ont les deux mêmes bouts.

Si  $\tilde{l} = \tilde{l}'$ , alors pour  $n$  assez grand  $\partial^1 \tilde{a}_n$  et  $\partial^2 \tilde{a}_n$  intersectent un  $\varepsilon$ -voisinage de  $\tilde{l}$ . Il existe donc un petit segment  $\tilde{I}_n \subset \partial \tilde{M}$  qui joint les deux composantes du bord de  $\tilde{a}_n$  avec  $\tilde{I}_n \cap \tilde{a}_n = \partial \tilde{I}_n$ . La projection de  $\tilde{I}_n$  sur  $\partial M$  est un arc de compression sur  $a_n$  et par chirurgie de  $a_n$  le long de cet arc, on obtient un disque essentiel  $D_n$  disjoint de  $a_n$  et dont le bord est homotope à une courbe contenue dans un  $\varepsilon$ -voisinage de  $a_n$ . Quitte à extraire,  $\partial D_n$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $\nu \in \mathcal{M}_{gom}$  et d'après le critère de Casson,  $\nu$  possède une feuille homoclinique. Comme  $\partial a_n$  converge géométriquement vers  $\alpha$  et que  $D_n$  est disjoint de  $a_n$ , alors  $\nu$  n'intersecte pas  $\alpha$ ; comme  $\partial D_n$  peut être homotopé dans un  $\varepsilon$ -voisinage de  $\partial a_n$ , alors pour  $i$  assez grand,  $\partial D_n$  est disjoint de  $\lambda - \alpha$ . On en déduit que  $\nu$  n'intersecte pas  $\lambda$  et en particulier qu'il existe une feuille homoclinique disjointe de  $\lambda$  ce qui contredit l'affirmation 3.3.

Si  $\tilde{l} \cap \tilde{l}' = \emptyset$ , alors  $\tilde{l}$  et  $\tilde{l}'$  sont biasymptotes et  $\alpha$  est annulaire. □

Achevons maintenant la preuve du ii). Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui satisfait la condition c) et intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques. Supposons que  $\lambda$  ne vérifie pas  $b_2$ ), il existe alors une suite  $(a_n)$  d'anneaux ou de rubans de Möbius essentiels telle que  $i(a_n, \lambda) \rightarrow 0$ . Quitte à extraire,  $(\partial a_n)$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $\alpha$  qui n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement. D'après l'affirmation précédente,  $\alpha$  est annulaire, ce qui contredit  $b_1$ ). □

**Lemme C.3.** *Soit  $\lambda$  une lamination vérifiant les conditions a) et c); alors les conditions  $b_1$ ),  $b_2$ ) sont équivalentes à la condition suivante : b) l'intersection des adhérences dans  $\tilde{B}$  de deux composantes connexes du complémentaire de  $p^{-1}(\lambda)$  dans  $\partial \tilde{M}$  est soit vide, soit l'adhérence d'une feuille  $\tilde{l} \subset p^{-1}(\lambda)$  dont la projection sur  $\partial M$  est une feuille fermée  $l$ .*

*Démonstration.* i) Montrons par l'absurde que b)  $\Rightarrow$   $b_1$ ). Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui satisfait les conditions a) et c) et intersecte toutes les courbes paraboliques. Supposons qu'il existe une lamination géodésique annulaire  $\alpha$  qui n'intersecte pas  $\lambda$ . Nous allons en déduire que  $\lambda$  ne vérifie pas b). Soient  $\tilde{l}^1, \tilde{l}^2$  une paire de géodésiques biasymptotes contenues dans un relevé de  $\alpha$ ;  $\tilde{l}^1$  et  $\tilde{l}^2$  sont contenues dans les adhérences  $\tilde{F}^1$  et  $\tilde{F}^2$  de deux composantes de  $\partial \tilde{M} - p^{-1}(\lambda)$ . Si  $\tilde{F}^1 = \tilde{F}^2$  alors  $\tilde{F}^1$  contient une paire de géodésiques biasymptotes, à savoir  $\tilde{l}^1$  et  $\tilde{l}^2$ . Si  $\tilde{F}^1 \neq \tilde{F}^2$ , d'après la condition b),  $\tilde{F}^1 \cap \tilde{F}^2$  est une géodésique  $\tilde{c}$  qui joint les bouts de  $\tilde{l}^1$ ; on a alors  $\tilde{l}^1 \neq \tilde{c}$  ou  $\tilde{l}^2 \neq \tilde{c}$  donc  $\tilde{F}^1$  ou  $\tilde{F}^2$  contient une paire de géodésiques biasymptotes, à savoir  $\tilde{l}^1$  et  $\tilde{c}$  ou  $\tilde{l}^2$  et  $\tilde{c}$ . Dans les deux cas, on peut donc

supposer que  $\tilde{F}^1$  contient deux géodésiques biasymptotes  $\tilde{l}^3$  et  $\tilde{l}^4$ . Si les demi-géodésiques  $\tilde{l}_+^3$  et  $\tilde{l}_+^4$  ainsi que  $\tilde{l}_-^3$  et  $\tilde{l}_-^4$  sont asymptotes dans  $\tilde{F}^1$ , on peut alors, comme dans la preuve du i) de la proposition 3, construire un méridien  $\mu \subset F^1$  ce qui contredit c). Sinon  $\tilde{F}^1$  contient une géodésique homoclinique ce qui contredit l'affirmation 3.3 et donc c).

ii) Montrons enfin  $b_1) \Rightarrow b)$ . On pourrait montrer que la condition b) est naturellement satisfaite par la lamination mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie. Comme la propriété b) ne sera pas utilisée dans la preuve du théorème 1, cette implication  $b_1) \Rightarrow b)$  peut alors être déduite du théorème 1. Nous allons néanmoins en donner, ici, brièvement, une preuve directe. Soient  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui vérifie les conditions a),  $b_1)$  et c) (et donc  $b_2)$  d'après la proposition 3),  $\tilde{F}^1$  et  $\tilde{F}^2$  deux composantes de  $\partial\tilde{M} - p^{-1}(\lambda)$  dont les adhérences s'intersectent et  $F^j$  la projection de  $\tilde{F}^j$  sur  $\partial M$ . Les adhérences de  $\tilde{F}^1$  et  $\tilde{F}^2$  contiennent alors deux demi géodésiques  $\tilde{l}_+^1$  et  $\tilde{l}_+^2$  dont les adhérences s'intersectent. Si  $\tilde{l}_+^1$  et  $\tilde{l}_+^2$  ne sont pas proprement homotopes sur  $\partial M$ , en appliquant la méthode utilisée dans la preuve du ii) du lemme C.1, on construit dans un voisinage de  $\tilde{l}_+^1 \cup \tilde{l}_+^2$  une suite d'anneaux ou de rubans de Möbius essentiels  $a_i$  avec  $i(\lambda, \partial a_i) \rightarrow 0$ , mais on ne peut ici garantir que  $\partial a_i$  est plongé. Le théorème de l'anneau ([Ja]) nous permet néanmoins d'en déduire une suites d'anneaux essentiels  $a'_i$  telle que  $i(\lambda, \partial a'_i) \rightarrow 0$ , ce qui contredit  $b_2)$ . Les demi-feuilles  $\tilde{l}_+^1$  et  $\tilde{l}_+^2$  se relèvent donc au revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de la composante de  $\partial M$  qui les contient en deux demi-géodésiques asymptotes. Deux telles courbes ne pouvant être séparées que par une feuille isolée de  $\lambda$ , on en déduit que  $\tilde{F}^1 \cap \tilde{F}^2$  contient une feuille  $\tilde{c}$  de ce type. La projection  $c = p(\tilde{c})$  de cette feuille est donc une feuille fermée et comme le support de  $\lambda$  est une lamination récurrente, ceci entraîne que ni  $\tilde{F}^1$  ni  $\tilde{F}^2$  n'est un triangle. Si  $\tilde{F}^1 \cap \tilde{F}^2$  contient un autre point, alors  $\tilde{F}^1 \cap \tilde{F}^2$  contient une paire de feuilles biasymptotes, ce qui contredit la condition  $b_1)$ ,  $\tilde{F}^1$  et  $\tilde{F}^2$  vérifient donc la condition b). □

**Lemme 3.5** *Si  $\lambda$  est une lamination géodésique mesurée qui satisfait aux conditions  $b_1)$  et c), alors elle a la propriété suivante :*

- $c_1)$  toute feuille homoclinique  $l$  qui est contenue dans une limite géométrique de courbes simples vérifie  $i(l, \lambda) > 2\pi$ .

*Démonstration.* Soient  $l$  une feuille homoclinique telle que  $i(\lambda, l) \leq 2\pi$ ,  $\tilde{l}$  un relevé de  $l$  dans  $\partial\tilde{M}$ ,  $l_+$  et  $l_-$  deux demi-feuilles de  $\tilde{l}$  qui n'intersectent pas de relevé de feuille fermée de  $\lambda$  et telles que  $l_+ \cap l_- = \emptyset$ . Notons  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  les minimaux contenus dans  $\tilde{l}_+$  et  $\tilde{l}_-$ . Munissons  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  d'une mesure transverse de support  $\alpha_+ \cup \alpha_-$ .

Montrons tout d'abord que  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  n'intersectent pas  $\lambda$ . Sinon, on a  $i(\lambda, \alpha_+) > 0$ . Soit  $I$  un segment de  $\alpha_+$  tel que  $i(I, \lambda) > 0$ ; alors, comme  $\alpha_+ \subset \tilde{l}_+$ ,  $l_+$  contient une infinité de segments proches de  $I$  et  $i(l, \lambda) = +\infty$ , ce qui contredit l'hypothèse de départ.

D'après ce qui précède, quitte à les raccourcir, on peu supposer  $l_+$  et  $l_-$  disjointes de  $\lambda$ . Comme  $\lambda$  satisfait la condition  $b_1)$ , les arguments de la preuve du ii) de la proposition 4, montrent que  $\inf_t d(l_+(t), l_-(t)) = 0$ . Il existe donc une suite de segment  $I_n$  dont la longueur tend vers 0 et qui joignent  $l_+$  à  $l_-$ . Si  $l$  est dans une limite géométrique de courbes simples, pour  $i$  assez grand,  $I_n$  n'intersecte pas de relevé de feuille fermées de  $\lambda$  et  $i(I_n, \lambda) \rightarrow 0$ . Ceci nous permet de conclure que pour  $n$  assez grand, la projection de la réunion de  $I_n$  et de l'arc de  $l$  qui joint ses deux extrémités est homotope à un méridien  $\mu_n$  tel que  $i(\lambda, \mu_n) \leq 2\pi$  ce qui contredit la condition c). □

## Références

- [Be] A.F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics 91 (1983).
- [Bo1] F. Bonahon, *Cobordism of automorphisms of surfaces*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., IV. Ser. 16 (1983), 451-466.
- [Bo2] F. Bonahon, *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3*, Ann. of Math. (2) 124 (1986), 71-158.
- [Bo3] F. Bonahon, *Closed curves on surfaces*, prépublication (1999).
- [Bo4] F. Bonahon, *Variations of the boundary of 3-dimensionnal hyperbolic convex cores*, J. Diff. Geom. 50 (1998), 1-24.
- [BoO] F. Bonahon, J.-P. Otal, *Laminations mesurées de plissage des variétés hyperboliques de dimension 3*, Prépublication de l'UMPA n°285 (2001).
- [Ca] R.D. Canary, *A covering theorem for hyperbolic 3-manifolds and its applications*, Topology 35 (1996), 751-778.
- [CaB] A.J. Casson, S.A. Bleiler, *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts 9 (1988).
- [CEG] R.D. Canary, D.B.A. Epstein, P. Green, *Notes on notes of Thurston*, Analytical and Geometrical Aspects of hyperbolic Space (1987), 3-92.
- [CuM] M. Culler, J.W. Morgan, *Group actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, Proc. Lond. Math. Soc. 55 (1987), 571-604.
- [EpM] D.B.A. Epstein, A.Marden, *Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces*, Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space (1987), 113-253.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Ponearu, *Travaux de Thurston sur les surfaces. Seminaire Orsay*, Asterisque No.66-67 (1979).
- [Fl] W. J. Floyd, *Group completions and limit sets of kleinian groups*, Invent. Math. 57 (1980), 205-218.
- [He] J. Hempel, *3-Manifolds*, Annals of Mathematics Studies 86 (1976).
- [Ja] W. Jaco, *Lectures on three-manifold topology*, (1980)
- [JaS] W. Jaco, P.B. Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Memoirs Amer. Math. Soc. 220 (1979).
- [Jo] K. Johansson, *Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundary*, Lectures Notes in Mathematics 761 (1979).
- [JoM] T. Jørgensen, A. Marden, *Algebraic and geometric convergence of Kleinian groups*, Math. Scand. 66 (1990), 47-72.
- [Ka] M. Kapovitch, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Progress in Mathematics 183 (2000).
- [KeS] L. Keen, C. Series, *Continuity of convex hull boundaries*, Pac. J. Math. 127 (1988), 457-519.
- [KlS] G. Kleineidam, J. Souto, *Algebraic convergence of function groups*, à paraître dans Com. Math. Helv.
- [Ma] A. Marden, *The geometry of finitely generated Kleinian groups*, Ann. of Math. 99 (1974), 383-462.
- [MaT] K. Matsuzaki, M. Taniguchi, *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups* (1998).
- [MoO] J.W. Morgan, J.-P. Otal, *Relative growth rates of closed geodesics on surfaces under varying hyperbolic structures*, Comment. Math. Helv., 68 (1993), 171-208.
- [MoS1] J.W. Morgan, P.B. Shalen, *Degenerations of Hyperbolic structures I : Valuations, trees and surfaces*, Ann. of Math., 120 (1984), 401-476.
- [MoS2] J.W. Morgan, P.B. Shalen, *Degenerations of Hyperbolic structures III : actions of 3-manifolds groups on trees and Thurston's compactness theorem*, Ann. of Math. 127 (1988), 457-519.

- [Ot1] J.-P. Otal, *Courants géodésiques et produits libres*, Thèse d'Etat, Université Paris-Sud, Orsay (1988).
- [Ot2] J.-P. Otal, *Sur la dégénérescence des groupes de Schottky*, Duke Math. J. 74 (1994), 777-792.
- [Ot3] J.-P. Otal, *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, Astérisque 235 (1996).
- [OtP] J.-P. Otal, F. Paulin, *Géométrie hyperbolique et groupes Kleinien*s, manuscrit non publié.
- [Pa] F. Paulin, *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Invent. Math. 94 (1988), 53-80.
- [Ro] C. Rourke, *Convex ruled surfaces*, Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space (1987), 255-272.
- [Se] C. Series, *On Kerckhoff minima and pleating varieties for quasifuchsian groups II*, en préparation.
- [ShW] A. Shapiro, J.H.C. Whitehead, *A proof and extension of Dehn's lemma*, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 174-178.
- [Sk] R.K. Skora, *Splitting of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 23 (1990), 85-90.
- [Th1] W.P. Thurston, *The topology and geometry of 3-manifolds*, Notes de cours, Université de Princeton, 1976-79.
- [Th2] W.P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Am. Math. Soc. 19 (1988), 417-431.
- [Th3] W.P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1986), 357-381.
- [Th4] W.P. Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds, III : Deformations of 3-manifolds with incompressible boundary*, manuscrit non publié (1986).
- [Wa1] F. Waldhausen, *Eine Verallgemeinerung des Schleifensatzes*, Topology 6 (1967), 501-504.
- [Wa2] F. Waldhausen, *Heegard-Zerlegungen der 3-Sphäre*, Topology 7 (1968), 195-203.
- [Wa3] F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. Math. 87 (1968), 56-88.

UNITÉ DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES  
 ENS LYON, 46 ALLÉE D'ITALIE, 69364 LYON, FRANCE  
 Adresse électronique : clecuire@umpa.ens-lyon.fr