

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON  
UNITÉ DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON**

*Discipline* : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement

par

Cyril LECUIRE

le 12 Janvier 2004

*Titre* :

Structures hyperboliques convexes  
sur les variétés de dimension 3

---

*Directeur de thèse* :

Jean-Pierre OTAL

---

**Jury**

M.	Michel BOILEAU,	Rapporteur
M.	Jean-Pierre OTAL,	Directeur
M.	Pierre PANSU,	Examinateur
Mme.	Caroline SERIES,	Rapporteur
M.	Abdelghani ZEGHIB,	Examinateur



# Remerciements

Jean-Pierre Otal a su me proposer un sujet riche et passionnant, m'a encadré avec gentillesse, attention et surtout beaucoup de patience. A toutes les questions que je lui ai posées, il a su trouver une réponse souvent plus pertinente que la question elle-même. Je tiens à lui exprimer ici toute ma gratitude.

Je suis également très heureux de remercier Caroline Series et Michel Boileau d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Leurs travaux ont été et continuent à être pour moi une grande source d'inspiration.

Pierre Pansu et Abdelghani Zeghib m'ont fait l'honneur de participer au jury, je tiens à leur témoigner ici toute ma reconnaissance.

Je voudrais exprimer ma gratitude envers Dick Canary qui m'a permis de découvrir l'Amérique et envers Ursula Hammenstädt qui m'a invité a passer quelques semaines à Bonn. Francis Bonahon m'a offert un accueil plus que chaleureux, ce qui m'a permis de profiter de ses réponses et de ses questions (qui ont, entre autre, abouti au théorème  $D$ ), je le remercie vivement.

Durant ces trois dernières années, j'ai eu la chance de croiser Gero Kleineidam et Juan Souto et de discuter souvent avec chacun d'eux. Cette thèse doit beaucoup à leurs remarques et ils méritent amplement mes plus chaleureux remerciements.

Une tradition à laquelle je ne vais pas déroger (probablement un vieux reste militaire) est de souligner l'ambiance conviviale, sympathique et stimulante qui fait le quotidien de ce laboratoire. Je remercie tous les membres de l'UMPA et ceux qui en sont partis récemment pour leur contribution à cette ambiance et pour toutes les mathématiques qu'ils m'ont fait connaître. Merci spécialement à Mylène et à Jean-François pour avoir partagé un bureau avec moi et à Andres et Michael pour m'avoir (temporairement) fait sortir du monde de la géométrie hyperbolique en dimension 3.

Je ne saurais oublier dans ces remerciements Virginia Gallardo-Goncalves, Sabrina Kadri et Valérie Grosjean dont les efforts ont permis à cette soutenance d'avoir lieu.

Avant de conclure, un grand merci à Stuart et Thomas qui ont souvent soutenus et parfois mêmes encouragés mes digressions mathématiques.

Enfin je remercie ma famille à qui je dédie cette thèse.



# Introduction

Ce travail est consacré aux laminations géodésiques mesurées de plissage des variétés hyperboliques de dimension 3. Il présente une étude du rapport entre la convergence des métriques hyperboliques sur une variété donnée et le comportement des laminations géodésiques mesurées de plissage de ces métriques. Cette étude permet notamment de donner une description de l'ensemble des laminations qui apparaissent comme lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique hyperbolique géométriquement finie sur l'intérieur d'une variété de dimension 3.

Considérons une variété  $M$  compacte, connexe, orientable, de dimension 3. Supposons de plus que le bord de  $M$  n'est pas vide ; le théorème d'hyperbolisation de Thurston donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intérieur de  $M$  possède une métrique riemannienne de courbure sectionnelle  $-1$ . Une telle métrique est appelée hyperbolique et si  $\text{int}(M)$  admet une telle métrique, on dit que  $M$  est une *variété hyperbolique*. Une première condition nécessaire pour que  $M$  soit hyperbolique est que  $M$  ne contienne pas de sphères *essentiels*. Une sphère essentielle est une sphère plongée qui ne borde pas de boule et une variété qui ne contient pas de sphères essentielles est dite *irréductible*. Si  $M$  n'est pas irréductible, elle est somme connexe de variétés irréductibles (voir [He] par exemple). C'est-à-dire qu'il existe une famille  $\Sigma \subset \text{int}(M)$  de sphères essentielles disjointes telle que si  $M'$  est la variété (éventuellement non connexe) obtenue en découpant  $M$  le long de  $\Sigma$  et en collant une boule le long de chaque composante de bord ainsi formée, alors  $M'$  est irréductible. Ceci donne une place essentielle aux variétés irréductibles dans l'étude des variétés de dimension 3.

La deuxième condition nécessaire pour que  $M$  soit hyperbolique est que  $M$  soit *atoroïdale*, c'est-à-dire que tout sous-groupe  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  du groupe fondamental  $\pi_1(M)$  est conjugué à un sous-groupe de  $\pi_1(\partial M)$ . Pour toute variété  $M$  irréductible à bord, il existe, d'après [Joh] et [JaS], une collection de tores plongés telle que la variété obtenue en découpant  $M$  suivant cette famille de tores est une réunion de variétés Seifert (pour une définition des variétés de Seifert on peut, par exemple, se reporter à [JaS]) et de variétés atoroïdales.

D'après le théorème d'hyperbolisation de Thurston, ces deux conditions nécessaires sont suffisantes, c'est-à-dire qu'une variété à bord qui est irréductible et atoroïdale est hyperbolique. On en déduit qu'une variété irréductible à bord peut être découpée en une famille de variétés dont chaque membre est soit une variété Seifert, soit une variété hyperbolique. Tout ceci justifie qu'on accorde aux variétés hyperboliques une place importante dans l'étude des variétés compactes de dimension 3.

Supposons donc que  $M$  est irréductible et atoroïdale. Nous allons étudier les classes d'isotopies de métriques hyperboliques complètes sur l'intérieur de  $M$  ; c'est-à-dire que deux métriques  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sur l'intérieur de  $M$  sont identifiées si et seulement s'il existe un difféomorphisme  $f : M \rightarrow M$  isotope à l'identité et tel que  $\sigma_1 = f^*\sigma_2$ . Dans la suite, plutôt que de parler de classes d'isotopies de métriques hyperboliques complètes, nous considérerons que les métriques sont définies à isotopie près. Nous munirons l'ensemble  $\mathcal{H}(M)$  des métriques hyperboliques complètes (à isotopie près) sur l'intérieur de  $M$  de la topologie suivante : fixons un point  $x \in M$ , une métrique  $\sigma_2$  est contenue dans un  $(k, r)$ -voisinage de la métrique  $\sigma_1$  s'il existe un difféomorphisme  $g : M \rightarrow M$

isotope à l'identité tel que la restriction de  $g$  à la boule  $B(x, r) \subset (int(M), \sigma_1)$  est un difféomorphisme  $k$ -bilipschitz sur son image munie de la métrique  $\sigma_2$ . On obtient une base de voisinage de  $\sigma_1$  en faisant tendre  $k$  vers 1 et  $r$  vers  $+\infty$ . Cette topologie ne dépend pas du choix de  $x$ .

Si  $\partial M$  contient des sphères alors  $M$  est une boule. Dans ce cas  $int(M)$  possède une seule métrique à isotopie près; on notera  $\mathbb{H}^3$  la boule ouverte munie d'une métrique hyperbolique complète. Si  $\partial M$  est constitué uniquement de tores, toute métrique hyperbolique complète sur  $int(M)$  donne un volume fini à  $int(M)$ . On peut alors appliquer le théorème de rigidité de Mostow (cf. [Mo], [Ga]), il s'en suit que  $\mathcal{H}(M)$  est fini.

Notons  $\partial_{\chi < 0} M$  la réunion des composantes de  $\partial M$  dont la caractéristique d'Euler est strictement négative. Pour avoir un espace  $\mathcal{H}(M)$  infini, il nous faut supposer que  $\partial_{\chi < 0} M \neq \emptyset$ . Dans ce cas, l'intérieur de  $\mathcal{H}(M)$  est une boule ouverte de dimension  $-3\chi(\partial_{\chi < 0} M)$  (voir [CaM, chap. 7] pour une discussion de ce résultat).

L'un des invariants associés à une métrique hyperbolique complètes  $\sigma$  sur l'intérieur de  $M$  est son cœur convexe  $N(\sigma)$  : c'est le plus petit fermé non vide de  $int(M)$  convexe pour la métrique  $\sigma$  et homotopiquement équivalent à  $M$ . La métrique  $\sigma$  est dite *convexe cocompacte* si  $N(\sigma)$  est compact. Lorsque  $int(M)$  admet une métrique convexe cocompacte, l'intérieur de  $\mathcal{H}(M)$  est formé des métriques convexes cocompactes. La métrique  $\sigma$  est dite *fuchsienne* si  $int(N(\sigma)) = \emptyset$ , c'est-à-dire si  $N(\sigma)$  est une variété de dimension 2 (éventuellement à bord). Nous noterons  $\mathcal{CC}(M)$  l'ensemble des métriques convexes cocompactes non fuchiennes sur  $int(M)$ . Dans ce texte, nous allons nous intéresser à un ensemble un peu plus grand que  $\mathcal{CC}(M)$  : la métrique  $\sigma$  est dite *géométriquement finie* si  $N(\sigma)$  a un volume fini. Nous noterons  $\mathcal{GF}(M)$  l'ensemble des métriques géométriquement finies non fuchiennes sur l'intérieur de  $M$  et  $\mathcal{F}(M)$  l'ensemble des métriques fuchiennes sur  $int(M)$  (qui sont toutes géométriquement finies).

Le bord de  $N(\sigma)$  a été décrit par W. Thurston ([Th1]), il a les propriétés suivantes :

- la distance induite sur  $\partial N(\sigma)$  par les longueurs des arcs rectifiables est hyperbolique;
- l'inclusion  $\partial N(\sigma) \subset int(M)$  est totalement géodésique sur le complémentaire d'une *lamination géodésique* (i.e. un compact qui est réunion disjointe de géodésiques simples) appelée le *lieu de plissage* de  $\sigma$ ;
- l'intensité du plissage est décrite par une mesure transverse au lieu de plissage.

Notons  $M^\varepsilon$  l'ensemble des points en lesquels le rayon d'injectivité pour  $\sigma$  est inférieur à  $\varepsilon$ . Lorsque  $\varepsilon$  est plus petit qu'une constante  $M(3)$  appelée *constante de Margulis*, le lemme de Margulis fournit une description de  $M^\varepsilon$ ; chaque composante connexe de  $M^\varepsilon$  appartient à l'une des familles suivantes :

- les tubes de Margulis homéomorphes des tores solides  $S^1 \times D^2$ ;
- les pointes de rang 1, homéomorphes à  $S^1 \times ]-\infty, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ ;
- les pointes de rang 2, homéomorphes à  $S^1 \times S^1 \times ]0, +\infty[$ .

Les tubes de Margulis dépendent du choix de  $\varepsilon$ , au contraire des pointes de  $M^\varepsilon$  qui sont indépendantes du choix de  $\varepsilon < M(3)$  au sens où pour  $\varepsilon, \varepsilon' < M(3)$ , la réunion des pointes de  $M^{\varepsilon'}$  est isotope à la réunion des pointes de  $M^\varepsilon$ . En ôtant de  $int(M)$  les pointes de  $M^\varepsilon$ , on obtient la *partie épaisse* de  $(int(M), \sigma)$ ; on notera  $N(\sigma)^{ep}$  l'intersection de  $N(\sigma)$  avec la partie épaisse de  $(int(M), \sigma)$ .

Il existe un homéomorphisme naturel  $f$  entre  $\partial N(\sigma)$  et une sous-surface (éventuellement non compacte) de  $\partial_{\chi < 0} M$ . Lorsque  $\sigma$  est géométriquement finie, cette sous-surface est obtenue en enlevant de  $\partial_{\chi < 0} M$  une multi-courbe  $\lambda^{(p)}$ . Les feuilles de  $\lambda$  sont obtenues de la manière suivante : l'intersection de  $\partial N(\sigma)$  avec chaque pointe de rang 1 est composée de deux anneaux totalement géodésiques (cf. [Mo]), l'image par  $f$  de ces deux anneaux est séparée par une feuille de  $\lambda^{(p)}$ . En procédant ainsi pour chaque pointe de rang 1, on obtient la multi-courbe  $\lambda^{(p)}$ . On munit chaque feuille de  $\lambda^{(p)}$  d'une mesure de Dirac de poids  $\pi$  et on ajoute à la multi-courbe pondérée ainsi formée l'image par  $f$  du lieu de plissage muni de sa mesure transverse pour obtenir la lamination géodésique mesurée de plissage de la métrique  $\sigma$ .

On peut maintenant définir une application  $b : \mathcal{GF}(M) \rightarrow \mathcal{ML}(\partial M)$  qui à une métrique géométriquement finie associe sa lamination géodésique mesurée de plissage, appelons la application de plissage de  $M$ . Une conjecture de W. Thurston dit que la restriction de cette application à  $\mathcal{CC}(M)$  est un homéomorphisme sur son image. La résolution de cette conjecture fournirait un système de coordonnées pour  $\mathcal{CC}(M)$  qui serait purement topologique. Ceci fournirait également des coordonnées pour  $\mathcal{GF}(M)$ , moyennant quelques modifications techniques pour conserver la continuité (voir théorème C). On peut comparer ceci avec les coordonnées fournies par la théorie d'Ahlfors-Bers ([Ber]), de nature analytique, qui paramètrent  $\mathcal{CC}(M)$  et les différentes composantes de  $\mathcal{GF}(M) - \mathcal{CC}(M)$  par des produits d'espaces de Teichmüller.

Cette conjecture est une motivation importante pour l'étude de l'application de plissage  $b$ . Dans ce texte, nous allons décrire les laminations géodésiques mesurées de plissage et établir quelques propriétés de  $b_{\mathcal{GF}}$ .

Commençons par énoncer ce qui est déjà connu. La continuité et la différentiabilité de  $b_{\mathcal{CC}}$  ont été démontrées dans [KeS] et [Bo3]. En ce qui concerne l'injectivité de  $b_{\mathcal{GF}}$ , F. Bonahon et J.-P. Otal ont montré dans [BoO] qu'une métrique dont la lamination géodésique mesurée de plissage est une multi-courbe pondérée est uniquement déterminée par sa mesure de plissage. Si  $M$  est un fibré en intervalles sur une surface, F. Bonahon ([Bo5]) a également montré l'injectivité de  $b_{\mathcal{GF}}$  dans un voisinage des métriques fuchsienues.

Concernant l'image de  $b_{\mathcal{GF}}$ , on a les résultats suivants. Lorsque le bord de  $M$  est incompressible, [BoO] fournit une caractérisation des laminations géodésiques mesurées qui constituent  $b(\mathcal{GF}(M))$ . Dans le cas où le bord de  $M$  est compressible, [BoO] fournit seulement une caractérisation des laminations géodésiques mesurées de  $b(\mathcal{GF}(M))$  dont le support possède un nombre fini de feuilles. Nous allons étendre ce dernier résultat de [BoO] pour obtenir une caractérisation de  $b(\mathcal{GF}(M))$  :

**Théorème A.** *Soient  $M$  une variété hyperbolique compacte, orientable de dimension 3 et  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$  une lamination géodésique mesurée sur son bord. Il existe sur l'intérieur de  $M$  une métrique hyperbolique géométriquement finie non fuchsienne  $\sigma$  dont  $\lambda$  est la lamination géodésique mesurée de plissage si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- a) toute feuille fermée de  $\lambda$  a un poids inférieur ou égal à  $\pi$  ;
- b)  $\exists \eta > 0$  tel que, pour tout anneau essentiel  $E$ ,  $i(\partial E, \lambda) \geq \eta$  ;
- c)  $i(\lambda, \partial D) > 2\pi$  pour tout disque essentiel  $D$ .

La condition c) vient de la formule de Gauss-Bonnet appliquée à un disque essentiel (cf. [BoO]). Lorsque  $\lambda$  est la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie non fuchsienne, les composantes de  $\partial \tilde{M} - p^{-1}(\lambda)$  sont des surfaces totalement géodésiques disjointes. La condition b) vient du fait que deux telles surfaces ne peuvent pas contenir des géodésiques proprement homotopes. ; ceci apparaît plus clairement si on remplace cette condition par l'une des conditions suivantes :

- b<sub>1</sub>) la lamination géodésique  $\lambda$  est anannulaire : c'est-à-dire que  $\lambda$  intersecte transversalement toute courbe simple fermée qui peut être homotopée dans un tore de  $\partial M$  et toute paire  $(l_1, l_2)$  de géodésiques simples (éventuellement confondues) de  $\partial M$  dont des relevés distincts à  $\partial \tilde{M}$  ont les deux mêmes bouts dans  $\tilde{M}$ .

- b<sub>2</sub>) l'intersection des adhérences dans  $\tilde{M}$  de deux composantes connexes du complémentaire de  $p^{-1}(\lambda)$  dans  $\partial \tilde{M}$  est soit vide, soit l'adhérence d'une feuille  $\tilde{l} \subset p^{-1}(\lambda)$  dont la projection sur  $\partial M$  est une feuille fermée  $l$ .

Dans cet énoncé,  $\tilde{M}$  désigne le revêtement universel de  $M$  et  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  la projection du revêtement. On compactifie  $\tilde{M}$  de la manière suivante : munissons  $M$  d'une métrique hyperbolique géométriquement finie  $\sigma$  dont toutes les pointes sont des pointes de rang 2 (l'existence d'une telle métrique est assurée par le théorème d'hyperbolisation de Thurston et par le théorème de

chirurgie de Dehn hyperbolique, cf. [Th1]). Choisissons ensuite une isométrie entre le revêtement universel de l'intérieur de  $M$  et  $\mathbb{H}^3$ , elle nous permet de considérer  $\tilde{N}(\sigma)^{ep}$  comme un fermé de  $\mathbb{H}^3$ . Comme  $\sigma$  est géométriquement finie, il existe un homéomorphisme naturel entre  $M$  et  $\overline{N(\sigma)^{ep}}$  qui nous permet maintenant d'interpréter  $\tilde{M}$  comme un fermé de  $\mathbb{H}^3$ . La compactification  $\overline{\tilde{M}}$  de  $\tilde{M}$  est l'adhérence de ce fermé (non compact) dans la compactification usuelle de  $\mathbb{H}^3$  par la boule unité. Si l'on remplace la métrique  $\sigma$  par une autre métrique  $\sigma'$  dont les seules pointes sont des pointes de rang 2, les deux compactifications ainsi obtenues sont homéomorphes, cette définition est donc indépendante de la métrique choisie.

La condition  $b_1$ ) est analogue à la condition 2' du théorème 1 de [BoO]. D'après la remarque qui suit, si  $\lambda$  est une multi-courbe pondérée, la condition  $b$ ) est équivalente à la condition 2 du théorème 2 de [BoO]. Le lien entre ces deux conditions  $b$ ) et  $b_1$ ) vient du fait que les laminations annulaires apparaissent comme limites géométriques de bords d'anneaux (cf. section 2.4).

**Remarque.** Comme  $M$  est orientable, si  $E$  est un ruban de Möbius proprement plongé; alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}(\partial E) \subset \partial M$  de son bord tel que  $\partial\mathcal{V}(\partial E)$  borde un anneau essentiel. Si  $\lambda$  est une lamination géodésique mesurée qui satisfait la condition  $b$ ), on a alors  $i(\partial E, \lambda) \geq \frac{\eta}{2}$ .  $\diamond$

Ce théorème A, qui sera prouvé dans le chapitre 5 permet d'obtenir une description complète de l'image de l'application de plissage. Nous avons exclu de  $\mathcal{GF}(M)$  les métriques fuchsienues, mais on peut facilement compléter cette description de  $b(\mathcal{GF}(M))$  avec celle de  $b(\mathcal{F}(M))$ . À une métrique fuchsienne sur  $int(M)$  est associé un homéomorphisme entre  $M$  et un fibré en intervalles, éventuellement tordu, sur une surface compacte  $\Sigma$  à bord. Le lieu de plissage est alors une section du fibré au-dessus de  $\partial\Sigma$ , chaque feuille étant munie d'une mesure de Dirac de poids  $\pi$ . On voit que  $M$  admet des métriques fuchsienues si et seulement si  $M$  est homéomorphe à un fibré en intervalle  $I \times \Sigma$ . Si  $\partial\Sigma = \emptyset$ , alors  $b(\mathcal{F}(M))$  contient uniquement la mesure nulle. Si  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  alors  $M$  est un bretzel, c'est-à-dire une somme connexe le long du bord de tores solides  $D^2 \times S^1$  et  $b(\mathcal{F}(M))$  contient une lamination géodésique mesurée différente pour chaque classe d'isotopie d'homéomorphisme entre  $M$  et un fibré en intervalles.

Dans la suite du texte on utilisera la notation  $\mathcal{P}(M) = b(\mathcal{GF}(M))$ .

L'élément principal de la preuve du théorème A est le résultat suivant :

**Théorème B.** *Soient  $M$  une variété hyperbolique compacte, orientable de dimension 3 et  $(\sigma_n)$  une suite de métriques géométriquement finies non fuchsienues sur l'intérieur de  $M$ ; notons  $\lambda_n \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\sigma_n$ . Supposons que  $\lambda_n$  converge dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$  vers une lamination géodésique mesurée  $\lambda$  qui vérifie les conditions suivantes :*

- *b)  $\exists \eta > 0$  tel que, pour tout anneau essentiel  $E$ ,  $i(\partial E, \lambda) \geq \eta$ ;*
- *c)  $i(\lambda, \partial D) > 2\pi$  pour tout disque essentiel  $D$ ;*
- *d) il n'existe pas d'homéomorphisme entre  $M$  et un fibré en intervalles sur un pantalon  $P$  tel que le support de  $\lambda$  soit l'image d'une section du fibré au-dessus de  $\partial P$ .*

*Alors la suite  $(\sigma_n)$  contient une sous-suite qui converge vers une métrique géométriquement finie non fuchsienne  $\sigma_\infty$  sur l'intérieur de  $M$ . De plus la lamination géodésique mesurée de plissage  $\lambda'$  de  $\sigma_\infty$  est obtenue en remplaçant par  $\pi$  le poids des feuilles compactes de  $\lambda$  qui ont un poids supérieur à  $\pi$  et en laissant inchangé le reste de  $\lambda$ .*

En fait, une version plus faible de ce résultat est suffisante pour la preuve du théorème A. Cette version apparaît dans [Le] où l'on prouve l'existence de  $\sigma_\infty$  sous les hypothèses supplémentaires suivantes :

- *a) toute feuille fermée de  $\lambda$  a un poids inférieur ou égal à  $\pi$ ;*
- *iii) la suite des supports des  $\lambda_n$  converge vers le support de  $\lambda$  pour la topologie de Hausdorff;*



– *iu*) pour tout  $n$ , les feuilles de poids  $\pi$  de  $\lambda$  sont des feuilles de poids  $\pi$  de  $\lambda_n$ .

Remarquons que les conditions *a*) et *c*) rendent la condition *d*) inutile (cf. lemme 3.4.1).

Si on se restreint aux métriques convexes cocompactes, on déduit du théorème B la propriété de  $b_{CC}$ . La continuité de cette application ayant été prouvée dans [KeS], on a alors :

**Corollaire B.1.** *L'application  $b_{CC} : \mathcal{CC}(M) \rightarrow b(\mathcal{CC}(M))$  est propre et continue lorsque son image est munie de la topologie faible\*.*

Rappelons que nous avons exclu de  $\mathcal{CC}(M)$  les métriques fuchsiennes. Comme on l'a vu plus haut, si  $M$  admet de telles métriques, alors  $M$  est homéomorphe à un fibré en intervalles sur une surface  $\Sigma$  et ou bien  $\Sigma$  est fermée, ou bien  $M$  est un bretzel. Toute métrique hyperbolique sur  $\Sigma$  fournit une métrique fuchsienne sur  $\text{int}(M)$  dont la lamination géodésique mesurée de plissage  $\lambda$  a été décrite précédemment : le support de  $\lambda$  est une section du fibré au dessus de  $\partial\Sigma$  et chaque feuille de  $\lambda$  a un poids égal à  $\pi$ . On voit ainsi que la restriction de  $b$  à  $\mathcal{F}(M)$  est localement constante. Lorsque  $\Sigma$  n'est pas un pantalon, l'espace des métriques hyperboliques (à isotopie près) sur  $\Sigma$  n'est pas compact. Si  $\Sigma$  est un pantalon alors  $M$  est un bretzel de genre 2 qui est aussi homéomorphe à un fibré en intervalles sur un tore percé donc  $\mathcal{F}(M)$  possède une composante connexe non compacte. Dans tous les cas où  $\mathcal{F}(M)$  n'est pas vide, on en déduit que  $\mathcal{F}(M)$  possède une composante connexe non compacte et que la restriction de  $b$  à  $\mathcal{F}(M)$  n'est pas propre.

Dans le cas où la limite d'une suite  $(\lambda_n)$  de laminations géodésiques mesurées de plissage est la lamination mesurée d'une métrique fuchsienne, un contrôle plus fin de la manière dont  $\lambda_n$  converge permet néanmoins d'obtenir la convergence des métriques correspondantes. C'est ce que montre le théorème suivant de C. Series.

**Théorème 0.1 ([KeS], théorème 1.7).** *Soient  $S$  une surface fermée de genre supérieur à 2,  $M$  un fibré en intervalles sur  $S$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \mathcal{P}(M)$  et  $\theta_n \rightarrow 0$ . Si  $\sigma_n$  est une métrique géométriquement finie non fuchsienne dont la lamination géodésique mesurée de plissage est  $\theta_n \lambda_n$  alors la suite  $(\sigma_n)$  converge vers une métrique fuchsienne  $\sigma_\infty \in \mathcal{F}(M)$ . De plus  $\sigma_\infty$  est déterminée de manière unique par  $\lambda$ .*

Intéressons nous maintenant aux métriques géométriquement finies non fuchsiennes. On voit apparaître des difficultés avec les feuilles de la limite  $\lambda$  qui ont des poids supérieurs à  $\pi$ . En particulier, le théorème B montre que l'application de plissage est discontinue au voisinage de toute métrique géométriquement finie qui possède des pointes de rang 1. Pour contourner cette difficultés, nous allons quotienter l'ensemble  $\mathcal{P}^+(M)$  des laminations géodésiques mesurées qui vérifient les conditions *b*), *c*) et *d*) par la relation suivante :

**Définition.** Soient  $\lambda, \mu \in \mathcal{ML}(\partial M)$ ; notons  $\lambda'$  (resp.  $\mu'$ ) la lamination géodésique mesurée obtenue en remplaçant par  $\pi$  le poids de feuilles fermées de  $\lambda$  (resp.  $\mu$ ) dont le poids excède  $\pi$ . On dit que  $\lambda$  est congrue à  $\mu$  modulo  $\mathcal{R}$ , et on note  $\lambda \mathcal{R} \mu$ , si et seulement si  $\lambda' = \mu'$ . On notera  $\lambda$  la classe de  $\lambda$  modulo  $\mathcal{R}$ .

On munit  $\mathcal{ML}(\partial M)$  de la topologie faible\* et  $\mathcal{ML}(\partial M)/\mathcal{R}$  de la topologie quotient. L'application  $b_{\mathcal{GF}}(M)$  passe au quotient en une application  $b_{\mathcal{R}} : \mathcal{GF}(M) \rightarrow \mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$ . Ceci nous permet de donner une version générale du théorème B :

**Théorème C.** *L'application  $b_{\mathcal{R}}$  est continue et propre.*

Un des intérêts de ce résultat est de permettre d'élaborer des critères de convergence pour des suites de métriques géométriquement finies. Par exemple, quand la lamination géodésique mesurée de plissage est une multi-courbe pondérée, la métrique est déterminée de manière unique par la mesure de plissage (cf. [BoO]). On en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire C.1.** *Soient  $(\sigma_n)$  une suite de métriques géométriquement finies sur l'intérieur de  $M$ , et  $\lambda_n$  la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\sigma_n$ . La suite  $(\sigma_n)$  converge vers une métrique géométriquement finie  $\sigma$  dont la lamination géodésique mesurée de plissage  $\lambda$  est une multi-courbe pondérée si et seulement si  $(\lambda_n)$  converge vers  $\lambda$ .*

D'après [Ta], si  $(\sigma_n)$  converge vers une métrique géométriquement finie, alors, pour  $n$  assez grand,  $\sigma_n$  est géométriquement finie. Dans l'énoncé du théorème ci-dessus, l'hypothèse que  $\sigma_n$  est géométriquement finie est donc superflue.

Les théorèmes A et B permettent d'étudier la dynamique de l'action du *groupe modulaire* de  $M$  sur  $\mathcal{ML}(\partial M)$ . Le groupe modulaire  $Mod(M)$  de  $M$  est le groupe des difféomorphismes de  $M$  à isotopie près.

Notons  $\mathcal{D}(M)$  l'ensemble

$$\{\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M) \mid \exists \eta > 0 \text{ tel que, pour tout disque ou anneau essentiel } E, i(\partial E, \lambda) \geq \eta\}$$

**Théorème D.** *Si  $M$  n'est pas un bretzel de genre 2, l'ensemble  $\mathcal{D}(M)$  est le domaine de discontinuité de l'action de  $Mod(M)$  sur  $\mathcal{ML}(\partial M)$ .*

Un *bretzel creux*  $H$  est une variété compacte de dimension 3 qui est la somme connexe le long du bord d'une boule de tores solides  $D^2 \times S^1$  et de fibrés en intervalles sur des surfaces fermées  $\Sigma \times [0, 1]$ . La variété  $H$  est un *petit bretzel creux* si c'est la somme connexe le long du bord de deux fibrés en intervalles sur des surfaces fermées ou d'un fibré en intervalles sur une surface fermée et d'un tore solide. Un *grand bretzel creux* est un bretzel creux qui n'est pas un petit bretzel creux. Nous allons supposer que  $\partial_{\chi < 0} H \neq \emptyset$ , dans ce cas  $\partial H$  possède une unique composante compressible appelée *bord extérieur* que nous noterons  $\partial_e H$ . Notons  $\mathcal{PML}(\partial_e H)$  l'espace projectif des laminations géodésiques mesurées sur  $\partial_e H$  et  $\mathcal{M}'$  l'adhérence dans  $\mathcal{PML}(\partial_e H)$  de l'ensemble des classes projectives des méridiens pondérés (un *méridien* est une courbe qui borde un disque essentiel).

Si  $H$  est un grand bretzel creux, on notera

$$\mathcal{O} = \{\lambda \in \mathcal{PML}(\partial_e H) \mid i(\lambda, \mu) > 0 \text{ pour tout } \mu \in \mathcal{M}'\}.$$

Si  $H$  est un petit bretzel creux, on notera

$$\mathcal{O} = \{\lambda \in \mathcal{PML}(\partial_e H) \mid i(\lambda, \nu) > 0 \text{ pour tout } \nu \in \mathcal{PML}(\partial_e H) \text{ telle qu'il existe } \mu \in \mathcal{M}' \text{ telle que } i(\mu, \nu) = 0\}.$$

Cet ensemble  $\mathcal{O}$  est appelé domaine de Masur. Il a été introduit par H. Masur ([Mas2]) pour les feuilletages mesurés sur les bretzels puis par J.-P. Otal ([Otal]) pour les laminations géodésiques mesurées sur les bretzels creux.

H. Masur ([Mas2]) et J.-P. Otal ([Otal]) ont montré que l'action de  $Mod(H)$  est proprement discontinue sur ce domaine.

Supposons que  $H$  n'est pas un bretzel de genre 2 et notons  $\hat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{ML}(\partial H)$  l'ensemble des laminations géodésiques mesurées dont la classe projective appartient à  $\mathcal{O}$ . Comme on le verra dans le chapitre 5, on a  $\hat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{D}(H)$  et si  $\lambda \in \mathcal{D}(H)$  est arationnelle alors  $\lambda \in \hat{\mathcal{O}}$ . En revanche on n'a pas nécessairement  $\mathcal{D}(H) \subset \hat{\mathcal{O}}$  : les exemples de la figure 1 sont des multi-courbes pondérées contenues dans  $\mathcal{D}(H) - \hat{\mathcal{O}}$  (ceci peut être déduit de [KLS]).

Comme l'a remarqué J. Souto, le théorème A et le fait que  $\hat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{D}(H)$  permettent de montrer que  $\mathcal{O}$  est connexe.

**Proposition 0.2.** *Les ensembles  $\hat{\mathcal{O}}$  et  $\mathcal{O}$  sont connexes par arc.*

La majeure partie de ce travail est consacrée à la démonstration du théorème C . Dans les deux premiers chapitres, on présente des résultats préliminaires sur les laminations géodésiques sur le bord des variétés de dimension 3 et sur les propriétés de  $\mathcal{P}(M)$ . On montre la continuité de  $b_{\mathcal{R}}$  dans le chapitre 3, puis sa propriété dans le chapitre 4. Dans le dernier chapitre on déduit les théorèmes A et D du théorème C et on explique les relations entre  $\hat{\mathcal{O}}$  et  $\mathcal{D}(M)$ . Enfin on présente en appendice des résultats sur les longueurs des courbes qui ont une petite mesure de plissage et sur la compactification de l'espace de Teichmüller par les laminations  $\Lambda$ -mesurées.

Comme le théorème B est un cas particulier du théorème C, il ne sera plus mentionné par la suite.

Signalons pour conclure cette introduction que le théorème A a fait l'objet d'une prépublication ([Le]).

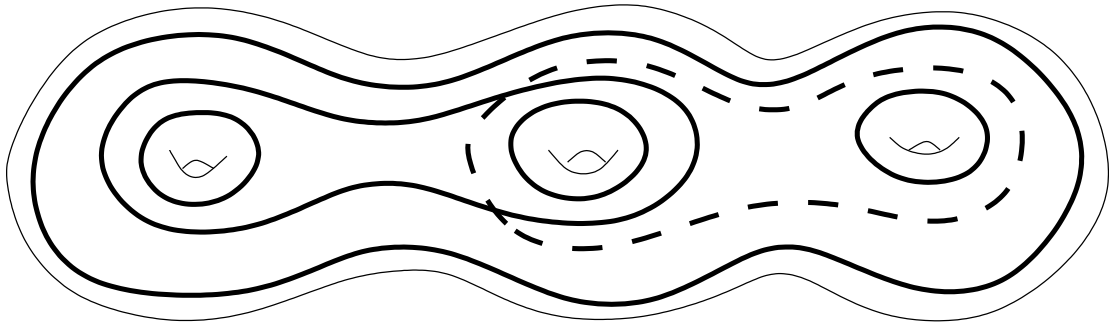


FIG. 1 – Exemple : en munissant chacune des composantes de la multi-courbe dessinée en gras d'un poids  $> \frac{2\pi}{3}$ , on obtient la lamination mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie sur l'intérieur d'un bretzel de genre 3.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Laminations géodésiques sur le bord des variétés de dimension 3</b>	<b>1</b>
1.1	Laminations géodésiques mesurées . . . . .	1
1.2	Laminations géodésiques $\Lambda$ -mesurées . . . . .	3
1.3	Surface embrassée par une lamination géodésique . . . . .	4
1.4	Critère de Casson . . . . .	6
1.5	Systèmes admissibles de méridiens . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Les différentes définitions de <math>\mathcal{P}(M)</math></b>	<b>12</b>
2.1	Sous-variété caractéristique . . . . .	13
2.2	Bouts des feuilles des laminations de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ . . . . .	16
2.3	Equivalence entre les définitions de $\mathcal{P}(M)$ . . . . .	19
2.4	Limites d’anneaux et laminations anannulaires . . . . .	19
2.5	Laminations annulaires et compactification de $\partial\tilde{M}$ . . . . .	26
2.6	Intersection avec les feuilles homocliniques . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Continuité de la mesure de plissage</b>	<b>29</b>
3.1	Surfaces plissées convexes . . . . .	29
3.2	Conditions nécessaires . . . . .	35
3.3	La topologie de $\mathcal{ML}/\mathcal{R}$ . . . . .	37
3.4	Relations entre $\mathcal{P}(M)$ et $\mathcal{P}^+(M)$ . . . . .	38
3.5	La continuité de $b_{\mathcal{R}}$ . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Propreté de l’application de plissage</b>	<b>48</b>
4.1	La longueur du lieu de plissage . . . . .	48
4.2	Réalisation de laminations géodésiques dans un arbre réel . . . . .	49
4.3	Propreté et topologie algébrique . . . . .	53
4.4	Construction de $E$ . . . . .	56
4.5	Les métriques sur le bord . . . . .	59
4.6	Convergence de $(\sigma_n)$ vers $\sigma_\infty$ . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>67</b>
5.1	L’image de $b_{G\mathcal{F}}$ . . . . .	67
5.2	Discontinuité de l’action de $Mod(M)$ sur $\mathcal{ML}(\partial M)$ . . . . .	68
5.3	Liens entre le domaine de Masur et $\mathcal{D}(M)$ . . . . .	69
<b>A</b>	<b>Mesure de plissage et longueurs des géodésiques</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Compactification de l’espace de Teichmüller et laminations géodésiques <math>\Lambda</math>-mesurée</b>	<b>81</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>



# Chapitre 1

## Laminations géodésiques sur le bord des variétés de dimension 3

Dans ce premier chapitre, nous allons énoncer quelques propriétés des laminations géodésiques sur le bord des variétés hyperboliques de dimension 3.

### 1.1 Laminations géodésiques mesurées

Soit  $S$  une surface (éventuellement non compacte et non connexe) munie d'une métrique hyperbolique complète. Une *lamination géodésique*  $L \subset S$  est un fermé qui est réunion disjointe de géodésiques complètes plongées dans  $S$ . Une géodésique complète plongée contenue dans  $L$  est une *feuille* de  $L$ .

Supposons maintenant que  $S$  a une aire finie. Une *multi-courbe* est une lamination géodésique dont toutes les feuilles sont compactes (i.e. une réunion de géodésiques simples compactes disjointes). Une lamination géodésique  $L$  est dite *minimale* si toute demi-feuille de  $L$  est dense dans  $L$ . Une lamination géodésique minimale qui n'est pas une géodésique fermée est appelée un *minimal exceptionnel*. Une feuille d'une lamination géodésique  $L$  est dite *récurrente* si elle est contenue dans une lamination géodésique minimale (cette lamination géodésique minimale étant nécessairement contenue dans  $L$ ). Toute lamination géodésique  $L$  est la réunion disjointe d'un nombre fini de laminations géodésiques minimales et d'un nombre fini de feuilles non-récurrentes (cf. [CaB]). Chaque demi-feuille d'une feuille non-récurrente ou bien spirale sur une lamination géodésique minimale ou bien est contenue dans un voisinage annulaire d'une pointe de  $S$ . Une feuille de  $L$  est une *feuille isolée* si c'est ou bien une feuille non-récurrente, ou bien une feuille fermée sur laquelle ne spirale aucune feuille non-récurrente. Une feuille de  $L$  est *isolée d'un côté* si elle est contenue dans l'adhérence d'une composante de  $S - L$ .

Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux laminations géodésiques, on dira que  $L_1$  *intersecte*  $L_2$  *transversalement* si  $L_1$  possède au moins une feuille qui intersecte une feuille de  $L_2$  transversalement. Remarquons qu'avec cette définition, deux laminations géodésiques peuvent s'intersecter transversalement tout en ayant des feuilles communes. Une lamination géodésique  $L$  est dite *arationnelle* si toute géodésique simple compacte intersecte  $L$  transversalement.

Ainsi définie, une lamination géodésique dépend de la métrique choisie sur  $S$ . L'affirmation suivante, qui est classique (voir [Ot3] par exemple), permet de s'abstraire de cette dépendance.

**Affirmation 1.1.1.** *Soient  $s_1$  et  $s_2$  deux métriques hyperboliques complètes d'aires finies sur  $S$ ; alors  $\mathcal{L}_{s_1}(S)$  et  $\mathcal{L}_{s_2}(S)$  sont homéomorphes ( $\mathcal{L}_{s_1}(S)$  et  $\mathcal{L}_{s_2}(S)$  étant munis de la topologie de Hausdorff).*

*Démonstration.* Notons  $q : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$  un revêtement qui est une isométrie locale pour  $s_1$ . Soient  $l \subset S$  une  $s_1$ -géodesique et  $\hat{l} \subset q^{-1}(l)$  un relevé de  $l$ ; d'après une propriété classique des métriques à courbure négative sur  $S$ , il existe une unique  $s_2$ -géodesique  $\Theta(l)$  dont un relevé  $\hat{\Theta}(\hat{l}) \subset q^{-1}(\Theta(l))$  est proprement homotope à  $\hat{l}$ . Ceci définit une bijection  $\Theta : \{\text{géodésiques de } (S, s_1)\} \rightarrow \{\text{géodésiques de } (S, s_2)\}$  qui est un homéomorphisme si on munit  $\{\text{géodésiques de } (S, s_1)\}$  et  $\{\text{géodésiques de } (S, s_2)\}$  de la topologie de Hausdorff. Comme l'image  $\Theta(L)$  d'une lamination  $s_1$ -géodesique  $L$  est une lamination  $s_2$ -géodesique, l'application  $\mathcal{L}_{s_1}(S) \rightarrow \mathcal{L}_{s_2}(S)$  ainsi définie est l'homéomorphisme recherché.  $\square$

Considérons toutes les métriques hyperboliques complètes sur  $S$  et identifions, par les homéomorphismes définis ci-dessus, les laminations géodésiques pour ces métriques; on obtient ainsi l'espace des laminations géodésiques sur  $S$ . Notons  $\mathcal{L}(S)$  l'espace des laminations géodésiques compactes et munissons-le de la topologie de Hausdorff. Dans la suite nous dirons qu'une suite de laminations géodésiques converge géométriquement si elle converge pour la topologie de Hausdorff (cette définition diffère de celle de [Th1]).

**Note.** Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux laminations  $s_1$ -géodesique qui s'intersectent transversalement et  $x \subset L_1 \cap L_2$  un point d'intersection transverse. Soit  $\hat{x} \subset \mathbb{H}^2$  un relevé de  $x$ ;  $\hat{x}$  est l'intersection d'une feuille  $\hat{l}_1$  de  $q^{-1}(L_1)$  et d'une feuille  $\hat{l}_2$  de  $q^{-1}(L_2)$ . Comme  $\hat{\Theta}(\hat{l}_1)$  intersecte  $\hat{\Theta}(\hat{l}_2)$  transversalement, il existe une application  $L_1 \cap L_2 \rightarrow \Theta(L_1) \cap \Theta(L_2)$  qui, à  $x$ , associe le point  $q(\hat{\Theta}(\hat{l}_1) \cap \hat{\Theta}(\hat{l}_2))$ . Ainsi, chaque point de l'intersection transverse de deux laminations géodésiques est défini indépendamment de la métrique hyperbolique choisie sur  $S$ .  $\diamond$

Revenons au cas général où  $S$  a éventuellement un volume infini. Une lamination géodésique mesurée  $\lambda$  est une lamination géodésique  $|\lambda|$  (éventuellement non compacte) munie d'une mesure transverse  $d\lambda$ , c'est-à-dire que tout arc  $k$  plongé dans  $S$  transversalement au support  $|\lambda|$  de  $\lambda$  et vérifiant  $\partial k \subset M - |\lambda|$  est muni d'une mesure transverse  $d\lambda|_k$  telle que :

- le support de  $d\lambda|_k$  est  $|\lambda| \cap k$ ;
- si un arc  $k$  est homotope à un arc  $k'$  par une homotopie laissant  $|\lambda|$  invariant, alors  $\int_k d\lambda = \int_{k'} d\lambda$ .

On munit l'espace  $\mathcal{ML}(S)$  des laminations géodésiques mesurées à support compact de la topologie faible\*. L'ensemble des multi-courbes pondérées est dense dans  $\mathcal{ML}(S)$  (cf. [FLP]).

Si  $\gamma$  est une géodésique simple compacte munie d'une mesure de Dirac de masse  $w(\gamma)$ , le nombre d'intersection  $i(\lambda, \gamma)$  est défini par  $i(\lambda, \gamma) = w(\gamma) \int_{|\gamma|} d\lambda$ . Cette fonction s'étend continuellement à  $\mathcal{ML}(S)$  (cf. [Bo2]).

Étant données une géodésique simple compacte  $c$  et une métrique hyperbolique  $s$  sur  $S$ , notons  $l_s(c)$  la longueur de la  $s$ -géodésique compacte qui est librement homotope à  $c$ . Si  $\gamma$  est une géodésique simple compacte munie d'une mesure de Dirac de masse  $w(\gamma)$ , on définit  $l_s(\gamma) = w(\gamma)l_s(|\gamma|)$ . La fonction  $l_s$  ainsi définie sur l'ensemble des multi-courbes pondérées s'étend continuellement en une application  $l_s : \mathcal{ML}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Nous dirons que deux laminations géodésiques mesurées s'intersectent transversalement si leurs supports s'intersectent transversalement.

Dans ce texte, nous utiliserons la définition suivante d'un réseau ferroviaire (cf. [Bo2]). Un réseau ferroviaire  $\tau$  dans  $S$  est la réunion d'un nombre fini de rectangles  $b_i$  appelés branches et satisfaisant :

- chaque branche  $b_i$  est un rectangle  $[0, 1] \times [0, 1]$  immergé de manière que la préimage des points doubles est constituée d'un segment de  $\{0\} \times [0, 1]$  et d'un segment de  $\{1\} \times [0, 1]$ ;
- l'intersection de deux branches distinctes est soit vide soit un segment non dégénéré contenu dans un côté vertical  $\{0\} \times [0, 1]$  ou  $\{1\} \times [0, 1]$  de chaque branche;



- la réunion des côtés verticaux de toutes les branches est une union disjointe d’arcs simples plongés dans  $\partial_{\chi < 0} M$ .

Une composante connexe de la réunion des côtés verticaux est appelé un aiguillage. Chaque branche  $b_i \approx [0, 1] \times [0, 1]$  est feuilletée par les segments  $\{p\} \times [0, 1]$  appelés traverses et par les segments  $[0, 1] \times \{q\}$  appelés rails.

Un sous-réseau  $\tau'$  d’un réseau ferroviaire  $\tau$  est un réseau ferroviaire dont toutes les branches sont des branches de  $\tau$ .

Une lamination géodésique  $L$  est portée par un réseau ferroviaire  $\tau$  si :

- $L$  est contenue dans  $\tau$  ;
- pour chaque branche  $b_i$  de  $\tau$ , l’intersection  $L \cap b_i$  n’est pas vide et est contenue dans l’image de  $[0, 1] \times ]0, 1[$  ;
- chaque feuille de  $L$  est transverse aux traverses.

Dans certains textes, une lamination géodésique mesurée vérifiant les conditions précédentes est dite portée minimalement par  $\tau$ .

Soient  $\tau$  un réseau ferroviaire et  $L$  une lamination géodésique qui est portée par un sous-réseau  $\tau'$  de  $\tau$  ; une branche  $b_i$  de  $\tau$  porte  $L$  si c’est une branche de  $\tau'$ .

Une lamination géodésique mesurée est portée par un réseau ferroviaire  $\tau$  si son support est porté par  $\tau$ .

À une lamination géodésique mesurée  $\lambda$  sur une surface connexe  $S$ , on associe de manière canonique un arbre réel  $\mathcal{A}_\lambda$  appelé arbre dual de  $\lambda$  dont nous allons rappeler la définition. Remplaçons chaque feuille compacte  $c$  de  $\lambda$  par un anneau feuilleté par des courbes fermées parallèles et muni d’une mesure uniforme transverse à ce feuilletage dont la masse est la masse portée par  $c$  dans  $\lambda$ . Notons  $\mathcal{F}_\lambda$  le feuilletage mesuré partiel de  $S$  ainsi obtenu et  $\hat{\mathcal{F}}_\lambda$  sa préimage dans le revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de  $S$ . Les points de  $\mathcal{A}_\lambda$  sont de deux types :

- les adhérences des composantes de  $\mathbb{H}^2 - \hat{\mathcal{F}}_\lambda$  ;
- les feuilles de  $\hat{\mathcal{F}}_\lambda$  qui ne sont pas contenues dans l’adhérence d’une composante de  $\mathbb{H}^2 - \hat{\mathcal{F}}_\lambda$ .

La distance entre deux composantes  $\hat{P}_1$  et  $\hat{P}_2$  de  $\mathcal{A}_\lambda$  est la suivante : soient  $\hat{x}_1 \in \mathbb{H}^2$  un point de  $\hat{P}_1$ ,  $\hat{x}_2$  un point de  $\hat{P}_2$  et  $[\hat{x}_1, \hat{x}_2]$  le segment géodésique qui joint  $\hat{x}_1$  et  $\hat{x}_2$ , alors  $d_{\mathcal{A}_\lambda}(\hat{P}_1, \hat{P}_2) = \int_{[\hat{x}_1, \hat{x}_2]} d\hat{\mathcal{F}}_\lambda$ . Cette distance fait de  $\mathcal{A}_\lambda$  un arbre réel (cf. [Ot3]) appelé arbre dual de  $\lambda$ . Le groupe fondamental de  $S$  agit par isométries sur  $\mathcal{A}_\lambda$ . Cette action est minimale, c’est-à-dire que  $\mathcal{A}_\lambda$  ne contient aucun sous-arbre invariant et à petits stabilisateurs d’arêtes, c’est-à-dire que le sous-groupe qui stabilise une arête est abélien. Dans cette construction, les points de  $\mathcal{A}_\lambda$  sont identifiés à des parties de  $\mathbb{H}^2$  et on notera  $\pi_\lambda : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{A}_\lambda$  la projection naturelle (définie à isotopie près sur un voisinage des feuilles compactes de  $\lambda$ ).

## 1.2 Laminations géodésiques $\Lambda$ -mesurées

Nous allons présenter dans cette section une généralisation des laminations géodésiques mesurées (cf. [MoO]).

Soit  $\Lambda$  un sous-groupe ordonné de rang  $p$  de  $\mathbb{R}^p$  (muni de l’ordre lexicographique). Pour  $x \in \Lambda$ , on notera  $[x]$  la première (en comptant de la gauche vers la droite) coordonnée non nulle de  $x \in \mathbb{R}^p$ . Soient  $x, y \in \Lambda$  ; définissons  $\frac{x}{y}$ . Si un sous-groupe de  $\Lambda$  contient  $x$  mais pas  $y$ , alors  $\frac{x}{y} = 0$  ; si un sous-groupe de  $\Lambda$  contient  $y$  mais pas  $x$ , alors  $\frac{x}{y} = \infty$  ; dans les autres cas,  $\frac{x}{y} = \frac{[x]}{[y]}$ .

Une lamination géodésique  $\Lambda$ -mesurée  $\mathcal{L}$  est une mesure à valeurs dans  $\Lambda$  transverse à une lamination géodésique  $|\mathcal{L}|$  : tout arc  $k \approx [0, 1]$  plongé dans  $S$ , transversalement à  $|\mathcal{L}|$ , vérifiant  $\partial k \subset S - |\mathcal{L}|$ , est muni d’une mesure finiment additive  $d\mathcal{L}$  à valeurs dans  $\Lambda$  telle que :

- le support de  $d\mathcal{L}|_k$  est  $|\mathcal{L}| \cap k$ ;
- si un arc  $k$  est homotope à un arc  $k'$  par une homotopie qui laisse  $|\mathcal{L}|$  invariant alors  $\int_k d\mathcal{L} = \int_{k'} d\mathcal{L}$ .

Si  $\lambda$  est une lamination géodésique  $\mathbb{R}$ -mesurée à support compact (nous utiliserons des lettres grecques pour baptiser les laminations géodésiques  $\mathbb{R}$ -mesurées), alors  $|\lambda|$  ne contient pas de feuilles non-récurrentes.

Nous dirons que deux laminations géodésiques  $\Lambda$ -mesurées s'intersectent transversalement si leurs supports le font.

En suivant [MoO], nous allons définir le  $\Lambda$ -arbre  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  dual d'une lamination géodésique  $\Lambda$ -mesurée  $\mathcal{L} \subset S$ . Considérons l'espace  $pre\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  dont les éléments sont les composantes du complémentaire de  $q^{-1}(|\mathcal{L}|)$  dans  $\mathbb{H}^2$ , où  $q : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$  est la projection de revêtement. Définissons une distance  $d : \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \rightarrow \Lambda$  sur cet espace : soient  $R_0$  et  $R_1$  deux composantes connexes de  $\mathbb{H}^2 - q^{-1}(\mathcal{L})$ . Choisissons un arc géodésique  $k \subset \mathbb{H}^2$  joignant un point de  $R_0$  à un point de  $R_1$  ; la distance  $d(R_0, R_1)$  est la  $q^{-1}(\mathcal{L})$ -mesure de  $k$ . Il existe un unique (à isométrie près)  $\Lambda$ -arbre  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  et un plongement isométrique  $e : pre\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  tel que tout point de  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  est contenu dans un segment dont les extrémités appartiennent à  $e(pre\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$  (cf. [GiS]). Les transformations de revêtement fournissent une action de  $\pi_1(S)$  par isométries sur  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ . Si  $c$  est une courbe simple compacte, nous noterons  $\delta_{\mathcal{L}}(c)$  la distance de translation d'une isométrie de  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  correspondant à  $c$  vu comme élément de  $\pi_1(S)$ .

Dans le cas d'une lamination géodésique  $\mathbb{R}$ -mesurée, l'arbre ainsi obtenu est isométrique à l'arbre défini dans la section 1.1 et nous les identifions.

Dans le cas général où  $\Lambda$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}^p$ , l'affirmation suivante relie  $\delta_{\mathcal{L}}(c)$  à la masse de la mesure transverse que  $\mathcal{L}$  dépose sur une courbe simple compacte  $c \subset |\mathcal{L}|$ .

**Affirmation 1.2.1.** *Pour une courbe simple compacte  $c \subset |\mathcal{L}|$ , la distance  $\delta_{\mathcal{L}}(c)$  est la demi-somme des mesures portées par les demi-feuilles de  $\mathcal{L}$  qui spiralent le long de  $c$ .*

*Démonstration.* Soient  $\tilde{c}$  un relevé de  $c$  à  $\mathbb{H}^2$  et  $g$  l'élément de  $\pi_1(S)$  qui laisse  $\tilde{c}$  invariant. Notons  $q : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$  la projection de revêtement. Si  $c$  est une feuille isolée, alors  $g$  fixe les composantes de  $\mathbb{H}^2 - q^{-1}(|\mathcal{L}|)$  dont le bord contient  $\tilde{c}$  et on a  $\delta_{\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}(c) = 0$ . Sinon, considérons un point  $\tilde{x}$  dans une composante de  $\mathbb{H}^2 - q^{-1}(|\mathcal{L}|)$  dont l'adhérence contient un bout  $\xi$  de  $\tilde{c}$ . Notons  $[\tilde{x}, g\tilde{x}]$  l'arc géodésique joignant  $\tilde{x}$  à  $g\tilde{x}$  et  $d \subset \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  l'image de  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} [g^i \tilde{x}, g^{i+1} \tilde{x}]$  par la projection  $\mathbb{H}^2 - q^{-1}(|\mathcal{L}|) \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  ; l'enveloppe convexe  $\bar{d} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  de  $d$  est invariante par  $g$ . Comme  $c$  n'est pas une feuille isolée,  $[\tilde{x}, g\tilde{x}]$  intersecte  $q^{-1}(\mathcal{L})$  et pour  $i < j$ , les arcs  $[g^i \tilde{x}, g^{i+1} \tilde{x}]$  et  $[g^j \tilde{x}, g^{j+1} \tilde{x}]$  intersectent la même composante connexe de  $\mathbb{H}^2 - q^{-1}(\mathcal{L})$  si et seulement si  $j = i+1$ . On en déduit que  $\bar{d}$  est une droite plongée, c'est donc l'axe de  $g$ . On en conclut que la distance de translation de  $g$  agissant sur  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  est la mesure de  $[\tilde{x}, g\tilde{x}]$ . Ceci achève la preuve de l'affirmation.  $\square$

Dans la suite, nous appellerons simplement laminations géodésiques mesurées les laminations géodésiques  $\mathbb{R}$ -mesurées.

### 1.3 Surface embrassée par une lamination géodésique

Nous allons associer à une lamination géodésique connexe une surface qu'elle remplit et que nous appellerons surface embrassée par cette lamination. L'existence d'une telle surface est une propriété bien connue des laminations géodésiques.

Soit  $L$  est une lamination géodésique compacte connexe sur une surface orientable  $S$  munie d'une métrique hyperbolique d'aire finie ; supposons que  $L$  n'est pas une courbe simple.

**Affirmation 1.3.1.** *Il existe une unique surface compacte  $\bar{S}(L)$  à bord géodésique telle que toute surface compacte à bord géodésique contenant  $L$  contient  $\bar{S}(L)$ .*

*Démonstration.* Soit  $F$  une sous-surface de  $S$ , on appellera *multi-courbe séparante* de  $F$ , une multi-courbe  $C$  telle que  $F - C$  n'est pas connexe.

Soit  $S_1$  une surface à bord géodésique contenant  $L$ . Si  $S_1$  ne contient pas de multi-courbe séparante disjointe de  $L$ , posons  $\bar{S}(L) = S_1$ . Sinon en découpant  $S_1$  suivant une telle multi-courbe, on obtient une surface  $S_2 \subsetneq S_1$  à bord géodésique contenant  $L$ . Si  $S_2$  ne contient pas de multi-courbe séparante disjointe de  $L$ , on pose  $\bar{S}(L) = S_2$ , sinon on obtient  $S_3$  telle que  $L \subset S_3 \subsetneq S_2$ . Comme une multi-courbe de  $S_1$  contient au plus  $-\frac{3}{2}\chi(S_1)$  éléments on obtient, après un nombre fini d'itérations, une surface  $S_j = \bar{S}(L)$  à bord géodésique, contenant  $L$  et ne contenant pas de multi-courbe séparante disjointe de  $L$ . Il nous reste à montrer que la surface  $\bar{S}(L)$  ainsi définie a la propriété recherchée, ceci entraînera, en outre, que  $\bar{S}(L)$  est indépendante de la suite finie  $S_1, S_2, \dots, S_j$  choisie. Soit  $F$  une surface à bord géodésique contenant  $L$ ; homotopons  $F \cap \bar{S}(L)$  en une surface  $S'$  à bord géodésique. On a alors  $L \subset S' \subset F \cap \bar{S}(L)$ . Si  $S' \subsetneq \bar{S}(L)$ , alors  $\partial S' \subset \bar{S}(L)$  est une multi-courbe séparante disjointe de  $L$ , ce qui est impossible par construction. On a donc  $\bar{S}(L) = S' \subset F$ .  $\square$

**Remarque.** D'après cette définition,  $\bar{S}(L)$  dépend de la métrique hyperbolique choisie sur  $S$ . Cependant, si l'on change cette métrique,  $\bar{S}(L)$  est seulement modifiée par une isotopie de  $S$ .  $\diamond$

**Affirmation 1.3.2.** *Il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques simples compactes dans  $\bar{S}(L)$  qui sont disjointes de  $L$ . De plus, ces géodésiques sont deux à deux disjointes et non séparantes.*

*Démonstration.* Nous allons montrer que deux géodésiques de  $\bar{S}(L)$  disjointes de  $L$  ne s'intersectent pas. Comme  $\bar{S}(L)$  ne peut contenir plus de  $-\frac{3}{2}\chi(S)$  géodésiques simples fermées disjointes, ceci montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques simples compactes dans  $\bar{S}(L)$  qui sont disjointes de  $L$ . D'après la preuve de l'affirmation précédente, la réunion de ces géodésiques est une multi-courbe non séparante.

Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux géodésiques simples fermées de  $\bar{S}(L)$  disjointes de  $L$ .

- Si  $\sharp(c_1 \cap c_2) = 1$ , alors un petit voisinage de  $c_1 \cup c_2$  est un tore percé disjoint de  $L$  et contenu dans  $\bar{S}(L)$ . Ceci contredit la minimalité de  $\bar{S}(L)$ .

- Si  $\sharp(c_1 \cap c_2) \geq 2$ ,  $c_2$  contient un arc  $k$ , tel que  $k \cap c_1 = \partial k$ . Un petit voisinage de  $c_1 \cup k$  est un pantalon de  $\bar{S}(L)$  disjoint de  $L$ . Ceci contredit à nouveau la minimalité de  $\bar{S}(L)$ .  $\square$

On appellera *bord effectif* de  $\bar{S}(L)$  et on notera  $\partial' \bar{S}(L)$  la réunion du bord topologique de  $\bar{S}(L)$  et des géodésiques simples compactes obtenues dans l'affirmation 1.3.2. On appellera *surface embrassée par la lamination  $L$*  et on notera  $S(L)$  la surface obtenue en enlevant à  $\bar{S}(L)$  un voisinage annulaire de  $\partial' \bar{S}(L)$ . Lorsque  $L$  est une courbe simple  $S(L)$  est simplement un voisinage annulaire de  $L$ .

Soit  $L$  une lamination géodésique (éventuellement non connexe); la *surface embrassée par  $L$* , notée  $S(L)$ , est la réunion disjointe des surfaces embrassées par les composantes connexes de  $L$ .

Cette construction fournit l'affirmation suivante :

**Affirmation 1.3.3.** *Soit  $c \subset S(L)$  une géodésique simple; alors ou bien  $c$  intersecte transversalement  $L$ , ou bien  $c \subset L$ .*

**Remarque.** En utilisant les arguments de la preuve du lemme 1.3.2, on note que toute géodésique simple qui intersecte transversalement  $\partial' \bar{S}(L)$  ou bien intersecte transversalement  $L$ , ou bien spirale sur une sous-lamination minimale de  $L$ .  $\diamond$

## 1.4 Critère de Casson

Soit  $M$  une variété hyperbolique compacte, orientable de dimension 3 ; notons  $\partial_{\chi < 0}M$  la réunion des composantes connexes de  $\partial M$  dont la caractéristique d'Euler est strictement négative et munissons chaque composante connexe de  $\partial_{\chi < 0}M$  d'une métrique hyperbolique complète.

On notera  $\mathcal{L}(\partial M)$  et  $\mathcal{ML}(\partial M)$  au lieu de  $\mathcal{L}(\partial_{\chi < 0}M)$  et  $\mathcal{ML}(\partial_{\chi < 0}M)$

Soit  $\Sigma \subset \partial M$  une surface compacte ; une sous-variété  $N \subset M$  est proprement plongée dans  $(M, \Sigma)$  si elle est plongée dans  $M$  et si  $N \cap \Sigma = \partial N$ .

Un disque essentiel dans  $(M, \Sigma)$  est un disque  $D$  proprement plongé dans  $(M, \Sigma)$  qui ne peut pas être homotopé dans  $\partial M$  par une homotopie fixant  $\partial D$ . La courbe simple  $\partial D$  est appelée un méridien. D'après le lemme de Dehn (cf. [He]), une courbe simple compacte  $c \subset \partial M$  qui est homotope à un point dans  $M$  mais pas dans  $\partial M$  est un méridien.

Une sous-variété  $N$  de  $M$  est incompressible si  $N$  n'est pas simplement connexe et si l'application  $i_* : \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(M)$  induite par l'inclusion est injective.

Un tore essentiel dans  $M$  est un tore incompressible qui ne peut pas être homotopé dans  $\partial M$  ; comme  $M$  est une variété hyperbolique, elle ne contient pas de tore essentiel.

Un  $I$ -fibré (i.e. un fibré en intervalles, éventuellement tordu)  $N \subset M$  sur un cercle ou sur une surface compacte à bord est essentiel dans  $(M, \Sigma)$ , si  $N$  est incompressible, si  $N \cap \partial M \subset \Sigma$  est le  $\partial I$ -fibré correspondant et si  $N$  ne peut pas être homotopé dans  $\partial M$  par une homotopie qui fixe le  $\partial I$ -fibré  $N \cap \Sigma$ .

Dans la suite, nous noterons simplement "essentiel" au lieu de "essentiel dans  $(M, \partial M)$ ".

Munissons  $M$  d'une métrique hyperbolique géométriquement finie  $\sigma$  dont toutes les pointes sont des pointes de rang 2 (l'existence d'une telle métrique est garantie par le théorème d'hyperbolisation et le théorème de chirurgie de Dehn hyperbolique de Thurston, cf. [Th1]). La variété  $M$  est homéomorphe à  $N(\sigma)^{ep}$  (cf. [Mar]) ; choisissons un homéomorphisme  $h : M \rightarrow N(\rho)^{ep}$  et munissons  $M$  de la métrique induite. Dans la suite du texte, lorsque nous montrerons des propriétés topologiques de  $M$  ou des laminations sur  $\partial M$ , nous supposons que  $M$  est munie de la métrique ainsi définie. Comme  $\partial N(\rho)^{ep}$  est une surface réglée, la métrique définie sur chaque composante de  $\partial_{\chi < 0}M$  par la longueur des arcs rectifiables est hyperbolique (cf. [Ro]). Comme dans l'introduction, on notera  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  la projection du revêtement universel.

Soit  $E$  un anneau ou ruban de Möbius essentiel ; si une composante  $\partial_2 E$  de  $\partial E$  est contenue dans un tore de  $\partial M$  ; alors l'autre composante  $\partial_1 E$  de  $\partial E$  est homotope à une géodésique simple compacte de  $\partial M$ . En la munissant d'une mesure de Dirac de poids 1, on obtient une lamination géodésique mesurée que nous noterons encore  $\partial E$  ; nous appellerons cette géodésique fermée simple une courbe parabolique (en effet, cette courbe est un parabolique accidentel pour toute métrique géométriquement finie sur l'intérieur de  $M$ ). Si le bord de  $E$  ne contient pas de courbes paraboliques, on peut homotoper  $E$  de façon à ce que son bord soit une lamination géodésique. En munissant les feuilles de cette lamination de poids égaux au degré de la restriction de l'homotopie au bord de  $E$ , on en fait une lamination géodésique mesurée que nous noterons  $\partial E$ . De manière similaire, si  $D$  est un disque essentiel, en munissant la géodésique fermée compacte homotope à  $\partial D$  d'une mesure de Dirac de poids 1, on obtient une lamination géodésique mesurée  $\partial D$ . Soit  $\lambda \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  et  $E \subset M$  un disque, anneau ou ruban de Möbius essentiel alors  $i(\lambda, \partial E)$  est le nombre d'intersection de  $\lambda$  et de la lamination géodésique mesurée  $\partial E$  définie précédemment.

Notons  $\mathcal{M}$  l'ensemble des multi-courbes de  $\partial M$  dont chaque composante borde un disque essentiel et  $ad_h(\mathcal{M})$  l'adhérence de  $\mathcal{M}$  dans l'espace  $\mathcal{L}(\partial M)$  (qui est muni de la topologie de Hausdorff).

Un feuille  $\tilde{l}$  d'une lamination géodésique  $\tilde{L} \subset \partial \tilde{M}$  est dite homoclinique lorsqu'elle contient

deux suites de points  $(x_n)$  et  $(y_n)$  tels que la distance entre les points  $x_n$  et  $y_n$  mesurée sur la feuille tend vers l'infini avec  $n$ , tandis que leur distance dans  $\tilde{M}$  reste bornée (cette définition diffère de celles de [Ot1] où une telle feuille est appelée faiblement homoclinique). Une feuille  $l$  d'une lamination géodésique  $L \subset \partial M$  est dite homoclinique si elle possède un relevé à  $\partial \tilde{M}$  qui est homoclinique. Un critère de Casson dit qu'une lamination géodésique connexe est contenue dans  $ad_h(\mathcal{M})$  si et seulement si elle contient une feuille homoclinique. Nous n'utiliserons pas cette équivalence, mais seulement l'implication suivante :

**Théorème 1.1.** *Une lamination géodésique de  $ad_h(\mathcal{M})$  contient une feuille homoclinique.*

*Démonstration.* Nous allons reprendre et compléter la démonstration de [Ot1].

Soit  $(D_n)$  une suite de disques essentiels dont les bords  $\partial D_n$  convergent géométriquement vers une lamination géodésique  $L \in ad_h(\mathcal{M})$ . Considérons un domaine fondamental relativement compact pour l'action de  $\pi_1(M)$  sur  $\tilde{M}$  et notons  $\tilde{D}_n$  un relevé de  $D_n$  qui intersecte ce domaine. Nous distinguerons deux cas suivant que la suite des diamètres des  $\partial \tilde{D}_n$  est bornée ou non.

Si les diamètres des  $\partial \tilde{D}_n$  sont majorés, alors les  $\partial \tilde{D}_n$  sont contenus dans un même compact de  $\partial \tilde{M}$  et, quitte à extraire une sous-suite, convergent vers un relevé  $\tilde{L}$  de  $L$  contenu dans ce compact. Une lamination géodésique contenue dans un compact est une union de feuilles homocliniques, ce qui prouve l'affirmation dans ce cas.

Supposons maintenant que les diamètres des  $\partial \tilde{D}_n$  ne sont pas majorés ; quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que  $diam(\partial \tilde{D}_n) \rightarrow \infty$ . Considérons une famille  $(E_i) \subset M$  de disques essentiels deux à deux non homotopes et de cardinalité maximale ; ils découpent  $M$  en une réunion de variétés à bord incompressible et de pantalons solides  $P_q$  (homéomorphes à des boules). Le complémentaire dans  $\partial M$  de leurs bords  $(\partial E_i)$  est une réunion de pantalons et de surfaces  $\Sigma_q$  avec au plus une composante de bord (d'après la maximalité de  $(E_i)$ ). Notons  $d_1 = \max_j \{ \max \{ d_{\tilde{M}}(x, y) / x, y \in \tilde{E}_j \} \}$  où  $\tilde{E}_j$  parcourt l'ensemble des composantes de  $p^{-1}(\bigcup_i E_i)$  et  $d_2$  le maximum des diamètres des pantalons solides  $P_q$  de  $M - \bigcup_i E_i$ . Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage régulier de  $\bigcup_i E_i$  ; quitte à modifier  $D_n$  par une homotopie qui fixe  $\partial D_n$ , on peut supposer que les adhérences des composantes connexes de  $D_n - \mathcal{V}$  sont des disques proprement plongés dans l'adhérence de  $\partial M \cup \partial \mathcal{V}$ . Comme on a supposé que le diamètre des  $\partial \tilde{D}_n$  n'est pas majoré, pour  $n$  assez grand,  $\partial D_n$  n'est librement homotope à aucun des méridiens  $\partial E_j$ . Il s'ensuit que  $D_n$  n'est pas contenu dans une composante de  $\partial M \cup \partial \mathcal{V}$ .

Soient  $\tilde{\Delta}$  un relevé d'un tel disque et  $\tilde{C}$  l'adhérence de la composante connexe de  $\tilde{M} - p^{-1}(\mathcal{V})$  qui contient  $\tilde{\Delta}$  tels que  $\partial \tilde{C} = p(\partial \tilde{C})$  est une surface incompressible. Comme  $\partial \tilde{C}$  est incompressible, alors  $\partial \tilde{\Delta}$  borde un disque  $\tilde{\Delta}' \subset \partial \tilde{C}$ . Comme  $M$  est irréductible,  $\tilde{\Delta} \cup \tilde{\Delta}'$  borde une boule  $B \subset \tilde{C}$ . Soient  $\tilde{B}$  le relevé de  $B$  qui contient  $\tilde{\Delta}$  et  $\tilde{\Delta}'$  le relevé de  $\tilde{\Delta}'$  contenu dans  $\tilde{B}$  ; on a  $\partial \tilde{B} = \tilde{\Delta} \cup \tilde{\Delta}'$ . Soit  $\tilde{F}$  une composante connexe de  $\tilde{\Delta}' \cap \partial \tilde{M}$  ; notons  $\Sigma_q$  la composante de  $\partial \tilde{M} - \mathcal{V}$  qui intersecte  $p(\tilde{F})$ . Montrons que  $\tilde{F}$  est simplement connexe. Si ce n'est pas le cas,  $\partial \tilde{F}$  contient une courbe  $\tilde{c} \subset \partial \Sigma_q$  ; comme  $\Sigma_q$  n'a qu'une composante de bord,  $\partial \Sigma_q = p(\tilde{c})$ . Comme  $D_n$  n'est pas contenu dans une composante de  $M - \mathcal{V}$ ,  $c$  intersecte  $\Delta$  et  $\tilde{c}$  intersecte un translaté de  $\tilde{\Delta}$ . La boule  $B$  étant plongée,  $\tilde{B}$  est disjointe de ses translatés et  $\tilde{c} \subset \partial \tilde{B}$  n'intersecte pas de translaté de  $\tilde{\Delta} \subset \partial \tilde{B}$ .

La surface  $\tilde{F}$  est donc un disque. Comme  $\tilde{F} \subset \tilde{\Delta}'$ , la restriction de  $p$  à  $\tilde{F}$  est un homéomorphisme. Le disque  $F = p(\tilde{F})$  est contenu dans la surface  $\Sigma_q$  ; son aire est donc inférieure à une constante  $A$  qui ne dépend que des types topologiques des  $\Sigma_k$ . Comme l'aire de  $\tilde{F}$  est majorée par  $A$ , il existe une constante  $d_3$  qui ne dépend que de  $A$  et de  $d_1$  et une collection d'arcs  $\tilde{k}_n^{lj} \subset \tilde{F}$  dont les bords sont contenus dans  $(\partial \tilde{F} - \mathcal{V}) \subset \partial \tilde{D}_n$ , qui séparent  $\tilde{F}$  en des composantes de diamètre inférieur à  $d_3$  et vérifient  $l_{\partial \tilde{M}}(\tilde{k}_n^{lj}) \leq 3d_1$  (voir figure 1.1). On projette ensuite ces arcs sur des arcs  $\tilde{k}_n^j \subset \Delta$  qui ont les mêmes extrémités que les  $\tilde{k}_n^{lj}$ .

On réalise cette construction pour chacune des composantes de  $\tilde{D}_n - \mathcal{V}$  et on ajoute aux  $\tilde{k}_n^j$  les composantes de  $p^{-1}(\bigcup_i E_i) \cap \tilde{D}_n$  pour construire une nouvelle famille  $\tilde{k}_n^j$  d'arcs dont les

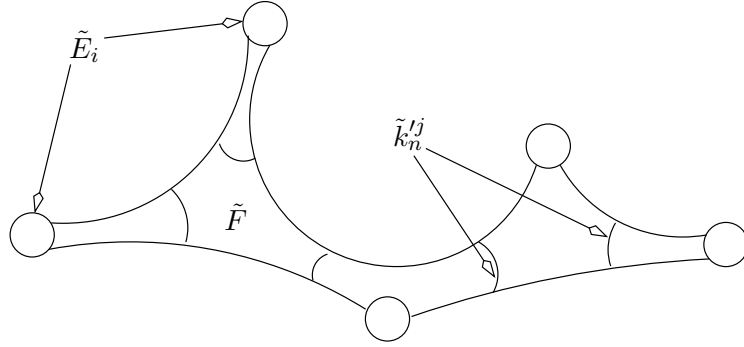


FIG. 1.1 – Un relevé de  $F$ .

bords sont contenus dans  $\partial\tilde{D}_n$  et qui séparent  $\tilde{D}_n$  en des composantes connexes  $\mathcal{C}$  telles que  $\text{diam}(\partial\mathcal{C} - \bigcup_j \tilde{k}_n^j) \leq d = \max\{d_2, d_3\}$ .

Soient  $N$  un entier et  $n$  assez grand pour que  $\text{diam}(\partial\tilde{D}_n) \geq 2N$ ; soient  $\tilde{x}_n$  et  $\tilde{y}_n$  deux points de  $\partial\tilde{D}_n$  qui réalisent son diamètre. D'après la propriété de séparation des  $\tilde{k}_n^j$ , il existe un arc  $\tilde{k}_n^0$  dont les bords séparent  $\partial\tilde{D}_n$  en deux arcs  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  et  $\tilde{c}_{\tilde{y}_n}$  contenant respectivement  $\tilde{x}_n$  et  $\tilde{y}_n$  et dont l'un,  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  par exemple, vérifie les propriétés suivantes (illustrées par la figure 1.2) :

- i) la distance dans  $\tilde{M}$  entre les extrémités de  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  est inférieure à  $3d_1$  ;
- ii)  $N \leq d_{\tilde{M}}(\tilde{x}_n, \partial\tilde{c}_{\tilde{x}_n}) \leq N + d$ .

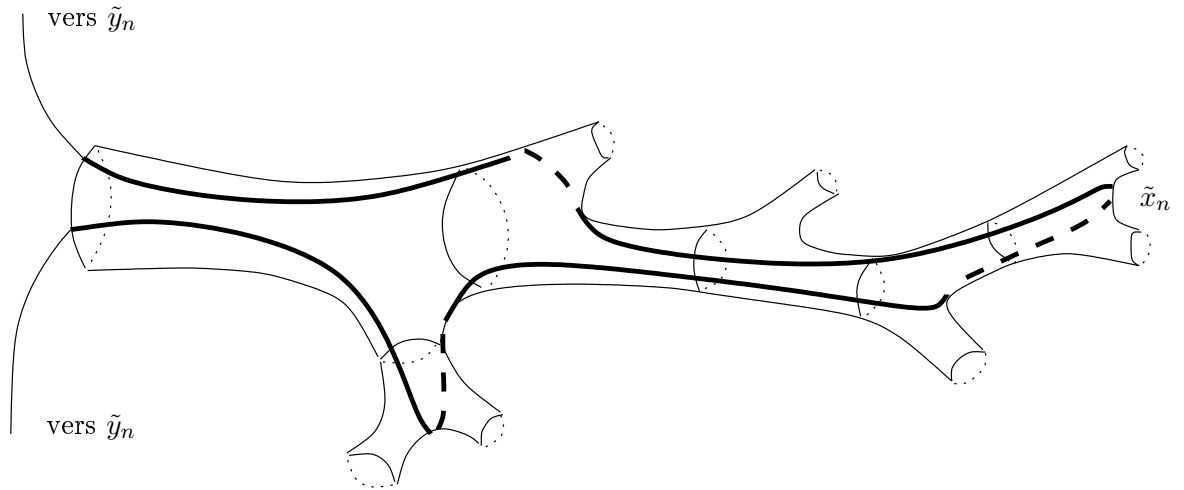


FIG. 1.2 – Un exemple d'arc  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  dans le cas d'un bretzel.

Pour obtenir  $\tilde{k}_n^0$ , on peut procéder de la façon suivante. Soit  $\tilde{k}_n^1 \in \{\tilde{k}_n^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  un arc qui, dans  $\tilde{D}_n$ , sépare  $\tilde{x}_n$  et  $\tilde{y}_n$ ; on a alors  $2N \leq d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \leq d(\tilde{x}_n, \tilde{k}_n^1) + d(\tilde{y}_n, \tilde{k}_n^1)$ . On en déduit que  $\max\{d(\tilde{x}_n, \tilde{k}_n^1), d(\tilde{y}_n, \tilde{k}_n^1)\} \geq N$ . Supposons par exemple que  $d(\tilde{x}_n, \tilde{k}_n^1) \geq N$ . Si  $d(\tilde{x}_n, \tilde{k}_n^1) \leq N + d$ , alors on prend  $\tilde{k}_n^0 = \tilde{k}_n^1$ . Sinon, notons  $\mathcal{C}_1$  la composante de  $\tilde{D}_n - \bigcup_j \tilde{k}_n^j$  telle que  $\tilde{k}_n^1 \subset \partial\mathcal{C}_1$  et que  $\tilde{k}_n^1$  sépare  $\mathcal{C}_1$  de  $\tilde{y}_n$ . Soit  $\tilde{k}_n^2 \neq \tilde{k}_n^1$  un arc de  $\mathcal{C}_1$  qui sépare  $\tilde{x}_n$  de  $\tilde{k}_n^1$ ; on a alors  $d(\tilde{x}_n, \tilde{k}_n^2) \geq d(\tilde{x}_n, \tilde{k}_n^1) - d > N + d - d$ . Si  $d(\tilde{x}_n, \tilde{k}_n^2) > N + d$ , on réitère l'opération. Notons  $q_1$  (resp.  $q_2$ ) le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{C}_1 - \bigcup_j \tilde{k}_n^j$  qui séparent  $\tilde{x}_n$  de  $\tilde{k}_n^1$  (resp.  $\tilde{k}_n^2$ ), on a alors  $d(\tilde{x}_n, \tilde{k}_n^2) \leq q_2d$  et  $q_2 < q_1$ . Comme  $q_2 < q_1$ , après un nombre fini d'itérations, on obtient un arc  $\tilde{k}_n^i$  qui a les propriétés de  $\tilde{k}_n^0$ .

Si  $\text{diam}(\tilde{c}_{\tilde{x}_n}) \geq 2N$ , on refait la même construction en remplaçant  $\partial\tilde{D}_n$  par  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n} \cup \tilde{k}_n^0$  et on

obtient un nouvel arc  $\tilde{c}_{\tilde{x}'_n} \subsetneq \tilde{c}_{\tilde{x}_n}$ . On a alors  $\#\{\tilde{c}_{\tilde{x}'_n} \cap \bigcup_j \tilde{k}_n^j\} < \#\{\tilde{c}_{\tilde{x}_n} \cap \bigcup_j \tilde{k}_n^j\}$ , donc après un nombre fini d'itérations, on obtient un arc  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  qui vérifie les propriétés i) et ii) ci-dessus et satisfait  $\text{diam}(\tilde{c}_{\tilde{x}_n}) \leq 2N$ . Après application d'un élément de  $\pi_1(M)$ , on peut supposer que ces arcs  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  sont contenus dans un même compact de  $\partial\tilde{M}$ . D'après l'étude du cas où la suite  $(\text{diam}(\tilde{D}_n))$  est bornée, si la suite des longueurs des  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  n'est pas bornée par une constante  $c(N)$ ,  $\lambda$  contient une feuille homoclinique. Dans le cas contraire, la suite des longueurs des  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  est bornée par une constante  $c(N)$ . Quitte à extraire une sous-suite, les arcs  $\tilde{c}_{\tilde{x}_n}$  convergent donc vers un arc dont les extrémités sont à une distance inférieure à  $3d_1$  et dont la longueur est minorée par  $N$  et majorée par  $c(N)$ . Cet arc est contenu dans une feuille  $\tilde{l}$  de  $p^{-1}(\lambda)$  et par densité de la réunion des feuilles isolées d'un côté, on peut supposer la projection  $l$  de  $\tilde{l}$  de ce type. En faisant varier  $N$  on obtient une suite d'arcs dont la longueur tend vers l'infini. Comme les feuilles isolées d'un côté sont en nombre fini, quitte à extraire, on peut supposer les projections de ces arcs contenues dans un même feuille  $l$ . Cette feuille  $l$  est homoclinique.  $\square$

## 1.5 Systèmes admissibles de méridiens

Soit  $c \subset \partial M$  une géodésique simple compacte sur le bord de  $M$ ; un arc de compression vers  $c$  est un arc  $\kappa$  plongé (on ne considèrera dans la suite que des arcs géodésiques) tel que  $c \cap \kappa = \partial\kappa$  et qui est homotope dans  $M$  relativement à  $\partial\kappa$  à un arc de  $c$ .

Une lamination géodésique  $L$  est dite en position prétendue par rapport à une multi-courbe  $C$  si et seulement si :

- 1)  $L$  ne contient pas d'arc de compression vers  $C$ ;
- 2) chaque feuille de  $L$  intersecte transversalement  $C$ .

**Affirmation 1.5.1.** *L'ensemble des laminations en position prétendue par rapport à une multi-courbe  $C$  fixée est ouvert pour la topologie de Hausdorff.*

*Démonstration.* Soient  $L$  une lamination géodésique en position prétendue par rapport à  $C$  et  $L_n$  une suite de laminations géodésiques convergeant géométriquement vers  $L$ . Supposons que  $L_n$  contient un arc de compression  $k_n$  vers  $C$ . Si  $l(k_n)$  est bornée, quitte à extraire,  $k_n$  converge pour la topologie de Hausdorff vers un arc de compression  $k \subset L$  vers  $C$ , ce qui contredit la propriété 1) ci-dessus. Par conséquent,  $l(k_n)$  n'est pas bornée et, quitte à extraire,  $k_n$  converge pour la topologie de Hausdorff. Sa limite contient alors une lamination géodésique qui est contenue dans  $L$  et qui n'intersecte pas  $C$  transversalement; ceci contredit 2).  $\square$

Soit  $S \subset \partial_{\chi < 0} M$  une surface compacte compressible dont le bord ne contient pas de méridiens et  $C \subset S$  une famille de méridiens deux à deux disjoints. Notons  $M'$  la variété compacte obtenue en découpant  $M$  le long d'une famille de disques essentiels disjoints bordés par  $C$  et  $S' \subset \partial M'$  la surface obtenue en découpant  $S$  le long de  $C$  et en recollant le long de chaque composante de bord ainsi formée le disque de  $\partial M' - S$  qu'elle borde. La multi-courbe  $C$  est un système admissible de méridiens de  $S$  si l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :

- $M'$  est une boule et  $S' = \partial M'$ ;
- $S'$  est incompressible dans  $M'$  (en particulier,  $S'$  ne contient pas de sphères).

Montrons que toute surface  $S \subset \partial_{\chi < 0} M$  dont le bord est incompressible contient un système admissible de méridiens.

**Affirmation 1.5.2.** *Soit  $S \subset \partial_{\chi < 0} M$  une surface compacte compressible dont le bord  $\partial S$  ne contient pas de méridiens; alors la surface  $S$  contient un système admissible de méridiens.*

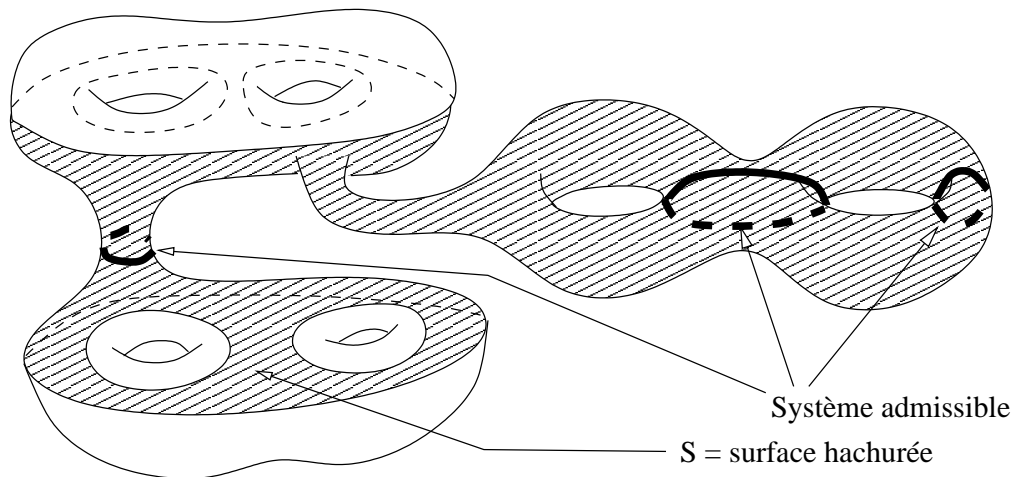


FIG. 1.3 – Un système admissible de méridiens de  $S$ .

*Démonstration.* Soient  $C_1 \subset S$  une réunion non séparante de méridiens de cardinalité maximale,  $M_1$  la variété obtenue en découpant  $M$  le long d'une famille de disques disjoints bordés par les composantes de  $C_1$  et  $S_1 \subset \partial M_1$  la surface obtenue en découpant  $S$  le long de  $C_1$  et en recollant des disques le long des nouvelles composantes de bord ainsi formées. Les composantes de  $\partial S_1$  sont les composantes de  $\partial S$ , ce ne sont donc pas des méridiens.

Si  $M_1$  est une boule, alors, comme  $\partial S_1$  ne contient pas de méridien,  $S_1 = \partial M_1$  et  $C_1$  est un système admissible.

Sinon, nous allons découper  $S_1$  pour obtenir une surface incompressible. Si  $S_1$  est compressible, il existe un méridien  $c \in S \cap S_1$  qui ne borde pas de disque de  $S_1$ ; notons  $C_2$  la multi-courbe obtenue en ajoutant un tel méridien à  $C_1$ . Soit  $M_2$  la variété obtenue en découpant  $M_1$  le long d'un disque bordé par  $c$  et  $S_2 \subset \partial M_2$  la surface obtenue en découpant  $S_1$  le long de  $c$  et en recollant à la surface ainsi obtenue les disques de  $\partial M_2$  que bordent les nouvelles composantes de bord ainsi formées. Si  $S_2$  n'est pas incompressible, on réitère cette opération. À chaque étape, le nombre de composantes de  $C_i$  est inférieur à  $-\frac{3}{2}\chi(S)$ . Après un nombre fini d'étapes, on obtient donc un système admissible de méridiens.  $\square$

Soient  $L \subset \partial M$  une lamination géodésique et  $C$  une famille de méridiens par rapport à laquelle  $L$  est en position prétendue; en général, on ne sait pas si  $L$  est en position prétendue par rapport à une multi-courbe  $C' \subsetneq C$ . Dans le cas des méridiens, la conclusion découle de l'affirmation suivante :

**Affirmation 1.5.3.** *Soient  $L \subset \partial M$  une lamination géodésique et  $C$  une famille de méridiens par rapport à laquelle  $L$  est en position prétendue; alors pour chaque composante  $c$  de  $C$ ,  $L$  ne contient pas d'arcs de compression vers  $c$ .*

*Démonstration.* Soient  $c_1 \subset C$  une géodésique simple compacte et  $k$  un arc de compression vers  $c_1$ ; notons  $(m_i)$  une famille de disques disjoints bordés par les composantes  $c_i$  de  $C$ . Comme  $k$  est un arc de compression vers  $c_1$ , il existe un arc  $k_1 \subset m_1$  tel que  $k \cup k_1$  borde un disque essentiel  $D \subset M$ . Les composantes de  $D - \bigcup_i m_i$  sont des disques dont l'un au moins, appelons-le  $D'$ , est tel que  $\partial D' \cap k$  est connexe. Comme l'arc  $\partial D' \cap k$  est un arc de compression vers  $C$ , on a montré la contraposée de l'affirmation 1.5.3.  $\square$

Dans le cas d'un système admissible de méridiens, comme la surface  $S'$  définie plus haut est incompressible, on peut étendre ce fait de la manière suivante :



**Affirmation 1.5.4.** *Soient  $S \subset \partial_{\chi < 0} M$  une surface compressible dont le bord ne contient pas de méridiens,  $C$  un système admissible de méridiens de  $S$  et  $L \subset S$  une lamination géodésique ; si  $L$  est en position prétendue par rapport à une multi-courbe contenant  $C$ , alors elle ne contient d'arcs de compression vers aucune des composantes de  $C$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $L$  contient un arc  $k$  de compression vers une composante  $c$  de  $C$  ; il existe un arc  $k' \subset c$  tel que  $k \cap k' = \partial k = \partial k'$  et que  $k \cup k'$  borde un disque de  $M'$ . Soient  $M'$  la variété obtenue en découpant  $M$  le long d'une famille de disques bordée par  $C$  et  $S' \subset \partial M'$  la surface obtenue en découpant  $S$  le long de  $C$  et en recollant des disques le long des nouvelles composantes de bord ainsi formées. Comme  $S'$  est incompressible,  $k \cup k'$  borde un disque de  $D' \subset S'$ . Soit  $Q \subset \partial M \cap S'$  une multi-courbe ; les composantes de  $D' - Q$  sont des disques et il existe une composante  $D_0$  de  $D' - Q$  telle que  $\partial D_0 \cap \partial D'$  est connexe. L'arc  $\partial D_0 \cap \partial D' \subset k$  est alors un arc de compression vers  $Q$ .  $\square$

Une autre propriété fort utile des systèmes admissibles de méridiens est qu'en opérant sur un tel système des chirurgies le long d'arcs de compression, on obtient un système de méridiens qui est lui aussi admissible. Plus précisément soient  $C$  un système admissible de méridiens dans une surface  $S \subset \partial M$ ,  $c$  une composante de  $C$  et  $k$  un arc de compression vers  $c$ . Par chirurgie de  $c$  le long de  $k$ , on obtient deux méridiens  $c_1$  et  $c_2$  tels que l'un des deux, disons  $c_2$ , a la propriété suivante : en remplaçant, dans  $C$ ,  $c$  par  $c_2$ , on a encore un système admissible (cf. [Wa2]).

## Chapitre 2

# Les différentes définitions de $\mathcal{P}(M)$

Soit  $\sigma$  une métrique hyperbolique complète (définie à isotopie près) sur l'intérieur de  $M$  ; munissons  $\tilde{M}$  de la métrique relevée de  $\sigma$  et considérons une isométrie entre  $\text{int}(\tilde{M})$  et  $\mathbb{H}^3$ . Les transformations de revêtement fournissent une représentation fidèle et discrète  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ . L'image  $\rho(\pi_1(M))$  est un groupe kleinien (c'est-à-dire un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ ) finiment engendré et sans torsion et  $\text{int}(\tilde{M})$  munie de la métrique  $\sigma$  est isométrique à  $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$ . En faisant varier l'isométrie entre  $\text{int}(\tilde{M})$  et  $\mathbb{H}^3$ , on obtient ainsi l'ensemble des représentations conjuguées à  $\rho$ . On dira qu'une telle représentation est associée à  $\sigma$ .

Le groupe kleinien  $\rho(\pi_1(M)) \subset PSL_2(\mathbb{C})$  agit sur  $\hat{\mathbb{C}} = \partial\overline{\mathbb{H}^3}$ , son domaine de discontinuité  $\Omega_\rho \subset \partial\overline{\mathbb{H}^3}$  est le plus grand ouvert sur lequel cette action est proprement discontinue. L'ensemble limite  $L_\rho$  est le complémentaire de  $\Omega_\rho$  dans  $\partial\overline{\mathbb{H}^3}$ , son enveloppe convexe  $C(\rho) \subset \mathbb{H}^3$  est le plus petit convexe de  $\mathbb{H}^3$  invariant par l'action de  $\rho(\pi_1(M))$ . Le cœur de Nielsen  $N(\rho)$  de  $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$  est le quotient de  $C(\rho)$  par  $\rho(\pi_1(M))$  (voir [Th1, chap 8] pour plus de détails). Ce convexe  $N(\rho)$  est l'image par l'isométrie  $\text{int}(\tilde{M}) \rightarrow \mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$  du cœur convexe  $N(\sigma)$  défini dans l'introduction, ce qui nous permet de confondre les deux. La partie épaisse,  $N(\rho)^{ep}$  du cœur de Nielsen, est le complémentaire dans  $N(\rho)$  des pointes de  $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$ . La représentation  $\rho$  est dite géométriquement finie si  $N(\rho)^{ep}$  est compacte (une définition ici équivalente est que  $N(\rho)$  a un volume fini) et convexe cocompacte si  $N(\rho)$  est compact. La représentation  $\rho$  est fuchsienne si l'intérieur de  $N(\rho)$  est vide.

Lorsque  $\sigma$  est géométriquement finie on peut étendre l'isométrie  $\text{int}(\tilde{M}) \rightarrow \mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$  de départ en un homéomorphisme  $M - (\lambda^{(p)} \cup \partial_{\chi=0}M) \rightarrow (\mathbb{H}^3 \cup \Omega_\rho)/\rho(\pi_1(M))$  où  $\lambda^{(p)}$  est une multi-courbe qui dépend des pointes de rang 1 de  $\sigma$ . Si  $\sigma$  est géométriquement finie et non fuchsienne, la rétraction de  $(\mathbb{H}^3 \cup \Omega_\rho)/\rho(\pi_1(M))$  sur  $N(\rho)$  permet de définir (à isotopie près) deux homéomorphismes  $h_1 : M - (\lambda^{(p)} \cup \partial_{\chi=0}M) \rightarrow N(\rho)$  et  $h_2 : M \rightarrow N(\rho)^{ep}$  associés à  $\sigma$ .

L'homéomorphisme  $h_2$  permet de préciser la définition de  $\overline{\tilde{M}}$  donnée dans l'introduction. Soit  $\rho$  une représentation géométriquement finie de  $\pi_1(M)$  dont les sous-groupes paraboliques maximaux sont d'ordre deux et  $h_2 : M \rightarrow N(\rho)^{ep}$  l'homéomorphisme défini précédemment ; on définit  $\overline{\tilde{M}}$  comme l'adhérence dans  $\overline{\mathbb{H}^3}$  de  $C(\rho)^{ep} = \tilde{N}(\rho)^{ep}$  ; on a alors  $\partial\overline{\tilde{M}} - \partial\tilde{M} = L_\rho$ . Soit  $\tilde{l} \subset \partial\tilde{M}$  une géodésique et  $\tilde{l}$  sont adhérence dans  $\overline{\tilde{M}}$  ; on dira que  $\tilde{l}$  a deux bouts bien définis dans  $\partial\overline{\tilde{M}}$  si  $\tilde{l} - \tilde{l}$  est constitué de 1 ou 2 points de  $L_\rho$ .

Soit  $(\sigma_n)$  une suite de métriques hyperboliques complètes sur  $\text{int}(M)$  ; cette suite  $(\sigma_n)$  converge algébriquement s'il existe une suite de représentations  $\rho_n : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  associées aux  $\sigma_n$  telle que  $(\rho_n)$  converge algébriquement, c'est-à-dire qu'il existe une représentation  $\rho_\infty : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  tel que  $\rho_n(g)$  converge vers  $\rho_\infty(g)$  pour tout  $g \in \pi_1(M)$ . D'après [Jor],  $\rho_\infty$  est une représentation fidèle est discrète. Pour  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , notons  $M_n = \mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$  ;

pour tout  $n$  il existe une équivalence d'homotopie entre  $M_n$  et  $M_\infty$ , mais cette équivalence d'homotopie n'est pas toujours réalisée par un homéomorphisme (cf. [AnC]).

La suite  $(\sigma_n)$  converge géométriquement si on peut choisir une suite de représentations  $\rho_n : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  associées aux  $\sigma_n$  telle que  $(\rho_n(\pi_1(M)))$  converge géométriquement c'est-à-dire qu'il existe  $\Gamma_\infty \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  tel que

- pour toute suite  $a_n \in \rho_n(\pi_1(M))$ , toute valeur d'adhérence  $a_\infty$  de  $(a_n)$  est contenue dans  $\Gamma_\infty$ ;
- tout élément  $a_\infty$  de  $\Gamma_\infty$  est la limite d'une suite  $a_n \in \Gamma_n$ .

La variété limite  $\mathbb{H}^3/\Gamma_\infty$  peut être très différente de  $\text{int}(M)$  (cf. [Th1]).

La suite  $(\sigma_n)$  converge fortement si on peut choisir des représentations  $\rho_n$  associées aux  $\sigma_n$  telles que  $(\rho_n)$  converge algébriquement vers une représentation  $\rho_\infty$  et que  $(\rho_n(\pi_1(M)))$  converge géométriquement vers  $\rho_\infty(\pi_1(M))$  (et on dit que la suite de représentations converge fortement). Si  $(\sigma_n)$  converge vers  $\sigma$  pour la topologie de  $\mathcal{H}(M)$  que nous avons définie dans l'introduction (que nous appellerons simplement topologie de  $\mathcal{H}(M)$ ), alors  $(\sigma_n)$  converge fortement vers  $\sigma_\infty$  (cf. [CEG]).

## 2.1 Sous-variété caractéristique

Soit  $\Sigma \subset \partial M$  une surface compacte incompressible; F. Johansson, W. Jaco et P.B. Shalen ont défini une sous-variété caractéristique  $W$  relative à  $\Sigma$  (cf. [Joh] et [JaS]). Lorsque  $M$  est une variété hyperbolique, c'est une union disjointe de  $I$ -fibrés  $W_i$  essentiels dans  $(M, \Sigma)$  et de sous-variétés  $W_k$  telles que  $W_k$  est homéomorphe à un tore solide  $D^2 \times S^1$  ou à un tore épaissi  $S^1 \times S^1 \times I$ . Chacune de ces sous-variétés  $W_k$  est essentielle dans  $(M, \Sigma)$ , c'est-à-dire que  $W_k$  est incompressible, que  $W_k \cap \partial M \subset \Sigma$ , que  $W_k$  ne peut pas être homotopée dans  $\partial M$  par une homotopie qui fixe  $W_k \cap \partial M$  et que les composantes de  $W_k \cap \partial M$  sont de la forme  $I \times S^1 \subset (\partial D^2) \times S^1$  ou  $S^1 \times I \times \{q\} \subset S^1 \times S^1 \times \partial I$ . Une telle union disjointe  $W$  de  $I$ -fibrés, de tores solides et de tores épaissis essentiels est une sous-variété caractéristique relative à  $\Sigma$  (on dira aussi sous-variété caractéristique de  $(M, \Sigma)$ ) si elle a les deux propriétés suivantes :

- tout  $I$ -fibrés essentiels dans  $(M, \Sigma)$  peut être isotopé dans  $W$ ;
- aucune composante de  $W$  ne peut être isotopée dans une autre composante de  $W$ .

Remarquons que cette définition tient compte du fait que  $M$  ne contient donc pas de tores essentiels.

D'après [Joh] et [JaS], si  $W$  et  $W'$  sont deux sous-variétés caractéristiques relatives à  $\Sigma$ , alors il existe un difféomorphisme  $\psi : M \rightarrow M$  isotope à l'identité relativement à  $\partial M - \Sigma$  tel que  $\psi(W) = W'$  et que  $\psi(W \cap \Sigma) = W' \cap \Sigma$ .

Dans les lignes qui suivent, nous allons utiliser des arguments de [OtP] pour construire une telle sous-variété caractéristique en utilisant une métrique hyperbolique sur l'intérieur de  $M$ . Pour cela, nous allons nous restreindre au cas où  $\Sigma$  ne contient pas de courbes paraboliques; dans ce cas une sous-variété caractéristique relative à  $\Sigma$  ne contient pas de tores épaissis.

La discussion de [OtP] que nous allons reprendre ici porte essentiellement sur les adhérences des composantes connexes de la préimage de  $\Sigma$  dans  $\partial \tilde{M}$ . Munissons  $M$  d'une métrique hyperbolique géométriquement finie  $\sigma$  dont toutes les pointes sont des pointes de rang 2, d'une représentation  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  associée à  $\sigma$  et d'un homéomorphisme  $h : M \rightarrow N(\rho)^{ep}$ . Cet homéomorphisme nous permet de considérer  $M$  comme une sous-variété de  $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M))$ . Chaque composante de  $\partial_{\chi < 0} M$  est munie de la métrique induite par la restriction de  $h$  à  $\partial M$ .

**Lemme 2.1.1.** *Soient  $\Sigma \subset \partial_{\chi < 0} M$  une surface compacte, connexe, incompressible, ne contenant pas de courbes paraboliques et  $\tilde{\Sigma}$  son revêtement universel, que l'on complète de la façon habituelle en un disque fermé  $\overline{\tilde{\Sigma}}$ ; alors, chaque composante de la préimage de  $\Sigma$  dans  $\partial\tilde{M}$  est un disque dont la fermeture dans  $\overline{\tilde{M}}$  est homéomorphe à  $\overline{\tilde{\Sigma}}$  de façon équivariante.*

*Démonstration.* Soient  $\tilde{\Sigma}$  une composante de la préimage de  $\Sigma$  dans  $\partial\tilde{M}$  et  $\Gamma$  le stabilisateur de  $\tilde{\Sigma}$  dans  $\rho(\pi_1(M))$ ; on a  $\Sigma \approx \tilde{\Sigma}/\Gamma$ . Comme  $\pi_1(\Sigma) \approx \Gamma$  est finiment engendré, d'après Thurston,  $\Gamma$  est géométriquement fini (cf. [MaT]). Si  $\Gamma$  contient un élément parabolique, alors il existe une courbe  $c \subset \Sigma$  qui peut être homotopée dans un tore  $T$  de  $\partial M$ . On a donc un anneau singulier  $E$  reliant  $\Sigma$  à  $T$  (i.e. une composante de  $\partial E$  est contenue dans  $\Sigma$  tandis que l'autre est contenue dans  $T$ ). D'après [Wa1], il existe un anneau plongé reliant  $\Sigma$  à  $T$ , donc  $\Sigma$  contient une courbe parabolique, ce qui est contraire à notre hypothèse de départ. Le groupe  $\Gamma$  est donc convexe cocompact. Comme  $\Sigma$  est incompressible, l'inclusion de  $\Sigma$  dans  $\partial M$  se relève en un homéomorphisme du revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  dans  $\tilde{\Sigma}$ . D'après Otal [Ot1, lemme 1.10] (voir aussi [Fl]), comme  $\Gamma$  est convexe cocompact, cet homéomorphisme s'étend en un homéomorphisme équivariant de  $\overline{\tilde{\Sigma}}$  dans  $\overline{\tilde{\Sigma}} = \tilde{\Sigma} \cup L_\Gamma$ . Comme  $\tilde{\Sigma} \cup L_\Gamma \subset C(\rho)^{ep} \cup L_\rho \approx \overline{\tilde{M}}$ , on a ainsi montré le lemme.  $\square$

**Affirmation 2.1.2.** *Soient  $\Sigma$  une surface compacte, connexe, incompressible, ne contenant pas de courbes paraboliques,  $\tilde{\Sigma} \subset \partial\tilde{M}$  une composante connexe de sa préimage et  $\Gamma \subset \rho(\pi_1(M))$  le stabilisateur de  $\tilde{\Sigma}$ ; alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il n'y a qu'un nombre fini de translatsés par des éléments de  $\rho(\pi_1(M))$  de l'ensemble limite  $L_\Gamma$  dont le diamètre pour la distance sphérique de  $\partial\mathbb{H}^3$  est supérieur à  $\varepsilon$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une infinité de translatsés  $g_n(L_\Gamma)$  de diamètre supérieur à  $\varepsilon$ ; les enveloppes convexes dans  $\mathbb{H}^3$  de ces translatsés intersectent un même compact de  $\mathbb{H}^3$ . On a alors une infinité de translatsés par des éléments de  $\rho(\pi_1(M))$  d'un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur l'enveloppe convexe  $C(L_\Gamma)$  qui intersectent un même compact. On a vu dans la preuve du lemme 2.1.1 que  $\Gamma$  est convexe cocompacte, ce domaine fondamental peut donc être choisi compact. Ceci contredit le fait que  $\rho(\pi_1(M))$  agit proprement discontinuement sur  $\mathbb{H}^3$ .  $\square$

**Affirmation 2.1.3.** *Soient  $\Sigma$  et  $\Sigma' \subset \partial_{\chi < 0} M$  deux surfaces disjointes, compactes, connexes, incompressibles, ne contenant pas de courbes paraboliques,  $\tilde{\Sigma} \subset \partial\tilde{M}$  (resp.  $\tilde{\Sigma}'$ ) une composante de la préimage de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma'$ ) et  $\Gamma \subset \rho(\pi_1(M))$  (resp.  $\Gamma'$ ) le stabilisateur de  $\tilde{\Sigma}_j$  (resp.  $\tilde{\Sigma}'_j$ ); alors si  $L_\Gamma \cap L_{\Gamma'}$  n'est pas vide, il contient au moins deux points.*

*Démonstration.* Soient  $\xi \subset L_\Gamma \cap L_{\Gamma'}$  et  $l^+$  une demi-géodésique de  $\mathbb{H}^3$  qui est asymptote à  $\xi$ ; notons  $o$  l'origine de  $\mathbb{H}^3$ . Comme  $\Gamma$  est convexe cocompact, il existe une suite non constante d'éléments  $g_n \in \Gamma$  et une constante  $K$  telles que, pour tout point  $x$  de  $l^+$ ,  $\exists n$  avec  $d(x, g_n(o)) \leq K$ . On a de même une constante  $K'$  et une suite  $g'_n \in \Gamma'$ , d'où  $d(g_n(o), g'_n(o)) \leq K + K'$ . Comme  $\rho$  est fidèle et discrète ceci entraîne que, quitte à extraire une sous-suite,  $\exists g \in \rho(\pi_1(M))$  telle que  $\forall n, g'_n g_n^{-1} = g$ . On a alors  $g'_n g_n^{-1} g_{n+1} g_{n+1}^{-1} = Id$ , d'où  $g_n^{-1} g_{n+1} = g'_n g'_{n+1}$  ce qui permet de conclure que  $L_\Gamma \cap L_{\Gamma'}$  contient les deux points fixes de  $g_n^{-1} g_{n+1}$ .  $\square$

**Proposition 2.1.** *Soient  $\Sigma$  et  $\Sigma' \subset \partial_{\chi < 0} M$  deux surfaces disjointes ou confondues, compactes, connexes, incompressibles, ne contenant pas de courbes paraboliques,  $\tilde{\Sigma}_j \subset \partial\tilde{M}$  une composante de la préimage de  $\Sigma_j$  et  $\Gamma_j \subset \rho(\pi_1(M))$  le stabilisateur de  $\tilde{\Sigma}_j$ .*

*Alors  $\overline{\tilde{\Sigma}} \cap \overline{\tilde{\Sigma}'}$  est ou bien vide, ou bien égal à l'ensemble limite de  $\Gamma \cap \Gamma'$ .*

*Dans ce dernier cas, si  $\Gamma \cap \Gamma'$  n'est pas cyclique, c'est le groupe fondamental d'une composante  $I$ -fibrée  $W_i$  d'une sous-variété caractéristique de  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$  et si  $\Gamma \cap \Gamma'$  est cyclique, c'est un sous-groupe d'indice fini du groupe fondamental d'un tore solide  $W_k$  qui est une composante d'une sous-variété caractéristique de  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$ .*

*Démonstration.* Soit  $F = \overline{\tilde{\Sigma}} \cap \overline{\tilde{\Sigma}'} = L_{\Gamma_1} \cap L_{\Gamma_2}$ ; comme les points fixes de tout élément de  $\Gamma \cap \Gamma'$  autre que l'identité sont contenus dans  $F$ , alors  $L_{\Gamma \cap \Gamma'} \subset F$ . Soit  $\tilde{C}$  l'enveloppe convexe de  $F$  dans  $\tilde{\Sigma} \subset \partial \tilde{M}$  munie de la métrique induite.

**Affirmation 2.1.4.** *L'image par  $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  de chaque géodésique de la frontière de  $\tilde{C}$  (ou de la géodésique  $\tilde{C}$  si  $F$  contient seulement deux points) est une géodésique simple compacte.*

*Démonstration.* Soit  $g \in \Gamma$ ; comme  $g(\tilde{\Sigma}')$  et  $\tilde{\Sigma}'$  sont confondues ou disjointes, alors  $\tilde{C}$  et  $g(\tilde{C})$  coïncident ou sont disjointes. La projection  $l = p(\tilde{l})$  de chaque composante  $\tilde{l}$  de  $\partial \tilde{C}$  est donc une géodésique simple. Si  $l$  n'est pas compacte, une infinité de translatés de  $\tilde{l}$  intersectent un même compact de  $\tilde{\Sigma}$  et les bouts de ses translatés sont contenus dans des translatés différents de  $L_{\Gamma'}$ . On a alors une infinité de translatés de  $L_{\Gamma'}$  dont le diamètre est minoré, ce qui contredit l'affirmation 2.1.2.  $\square$

Si le cardinal de  $F$  est deux, la projection de  $\tilde{C}$  est une géodésique simple compacte et  $\tilde{C}$  est stabilisé par un élément  $g \in \Gamma$  indivisible dans  $\Gamma$ . Si pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $g^n$  ne stabilisait pas  $\tilde{\Sigma}'$ , il y aurait une infinité de translatés de  $L_{\Gamma'}$  contenant  $F$ , ce qui contredirait l'affirmation 2.1.2. On en déduit qu'il existe  $n$  tel que  $g^n \in \Gamma \cap \Gamma'$  et que  $g^n$  stabilise  $\tilde{C}'$ . Notons  $g$  un élément indivisible de  $\rho(\pi_1(M))$  tel que  $g = g^p$ , il existe alors  $q \leq np$  tel que  $g^q$  est un élément indivisible de  $\Gamma'$  qui stabilise  $\tilde{C}'$ . Notons  $\tilde{c}^*$  l'axe de  $g$  et  $c^* \subset M$  sa projection; la géodésique  $C$  est librement homotope à  $pc^*$  et  $C'$  est librement homotope à  $qc^*$ . L'affirmation suivante va nous permettre de conclure que  $p = q$  et que  $C \cup C'$  borde un anneau essentiel.

**Remarque.** Sous les hypothèses de la proposition 2.1, il est possible que  $C = C'$ . Dans ce cas, on choisit un voisinage annulaire  $\mathcal{V} \subset \partial M$  de  $C$  et on remplace  $C$  par une composante de  $\partial \mathcal{V}$  et  $C'$  par l'autre composante de  $\partial \mathcal{V}$  (comme  $M$  est orientable,  $\partial \mathcal{V}$  a deux composantes connexes).  $\diamond$

**Affirmation 2.1.5.** *Soient  $c$  et  $c' \subset \partial M$  deux géodésiques simples compactes disjointes et  $p$  et  $q$  deux entiers tels qu'il existe une géodésique simple  $c \subset M$  telle que  $c$  est librement homotope à  $pc$  et que  $c'$  est librement homotope à  $qc$ . Alors  $p = q$  et  $c \cup c'$  borde un anneau essentiel.*

*Démonstration.* Soient  $\tilde{c} \subset \partial \tilde{M}$  un relevé de  $c$  et  $g \in \rho(\pi_1(M))$  un générateur du sous-groupe qui laisse  $\tilde{c}$  invariant; d'après les hypothèses de l'affirmation, il existe des relevés  $\tilde{c}$  de  $c$  et  $\tilde{c}'$  de  $c'$  invariant par  $g^{pq}$ . La famille  $\{\tilde{c}, \rho_n(g)(\tilde{c}), \dots, \rho_n(g^{p-1})(\tilde{c})\}$  découpe  $\partial \mathbb{H}^3 \approx S^2$  en  $p$  croissants  $Z_1, \dots, Z_p$ . Comme  $c'$  n'intersecte pas  $c$ , pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\rho_n(g^i)(\tilde{c}')$  est contenu dans l'un des  $Z_j$ . De plus  $Z_j = \rho_n(g)(Z_{j-1})$ , donc le nombre de translatés de  $\tilde{c}'$  qui sont contenus dans  $Z_j$  ne dépend pas de  $j$ . Comme  $q$  est le nombre de translatés de  $\tilde{c}'$  qui ont les mêmes bouts que  $\tilde{c}$ , on en déduit que  $p$  divise  $q$ . En échangeant les rôles de  $\tilde{c}$  et de  $\tilde{c}'$ , on obtient que  $q$  divise  $p$ . Ainsi on a  $q = p$  et  $c$  et  $c'$  sont donc librement homotopes. D'après [ShW] ceci entraîne que  $c \cup c'$  borde un anneau essentiel.  $\square$

Si le cardinal de  $F$  est strictement supérieur à deux, la surface  $C = p(\tilde{C})$  est une sous-surface de  $\Sigma$  bordée par des géodésiques simples compactes. Notons  $\Gamma_1 \approx \pi_1(C)$  le stabilisateur dans  $\Gamma$  de  $\tilde{C}$ ;  $\Gamma_1$  est le stabilisateur de  $F$  dans  $\Gamma$  donc  $\Gamma \cap \Gamma' \subset \Gamma_1$ . Comme  $F$  contient au moins trois points et que  $\Gamma_1$  stabilise  $F \subset \tilde{\Sigma}'$ ,  $\Gamma_1$  stabilise aussi  $\tilde{\Sigma}'$  et  $\Gamma_1 \subset \Gamma \cap \Gamma'$ . On a ainsi  $\Gamma_1 = \Gamma \cap \Gamma'$  et si  $\tilde{C}'$  est l'enveloppe convexe de  $F$  dans  $\tilde{\Sigma}'$ , alors  $C' = p(\tilde{C}')$  est homotope à  $C$ . Comme  $C \subset \Sigma$  est incompressible, d'après [Wa3],  $C \cup C'$  borde un  $I$ -fibré,  $C \times I$ , essentiel de  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$ .

On fait la même construction pour tous les translatés de  $\tilde{\Sigma}$  et  $\tilde{\Sigma}'$  dont l'adhérence intersecte  $\overline{\tilde{\Sigma}}$  ou  $\overline{\tilde{\Sigma}'}$ . Remarquons que l'étude des éléments de la forme  $g(\overline{\tilde{\Sigma}_j}) \cap \overline{\tilde{\Sigma}_j}$  peut produire des fibrés tordus. Comme les translatés de  $\tilde{\Sigma}$  et  $\tilde{\Sigma}'$  sont disjointes, l'intersection de trois éléments distincts parmi les translatés de  $\overline{\tilde{\Sigma}}$  et de  $\overline{\tilde{\Sigma}'}$  contient au plus 2 points. Quitte à les changer par

une homotopie, on peut donc supposer les  $I$ -fibrés  $W_i$  deux à deux disjoints. D'après l'affirmation 2.1.2, les translatés de  $\tilde{\Sigma}$  et  $\tilde{\Sigma}'$  dont les adhérences contiennent 2 points donnés sont en nombre fini ; il y a donc un nombre fini d'anneaux ou rubans de Möbius essentiels  $E_j$ . D'après [Joh], il existe une famille de tores solides essentiels  $W_k \subset M - \bigcup_i W_i$  tels que  $(\bigcup_k W_k) \cap \partial M$  est un voisinage annulaire de  $\bigcup_j \partial E^j$ . Quitte à changer les  $W_i$  et les  $W_k$  par une homotopie, on peut les supposer disjoints ; notons  $W = \bigcup_i W_i \cup \bigcup_k W_k$ .

Il nous reste à montrer que  $W$  est une sous-variété caractéristique de  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$ . Soit  $V \approx F \times I$  un  $I$ -fibré essentiel dans  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$  ; modifions  $V$  par une isotopie de façon que le bord de la surface  $V \cap \partial M$  soit géodésique (si  $V$  est un anneau ou un ruban de Möbius on le modifie de façon que  $\partial V$  soit géodésique). Soit  $\tilde{V} \approx \tilde{F} \times I \subset \tilde{M}$  un relevé de  $V$  ; chaque composante de  $\tilde{F} \times \partial I$  est contenue dans un relevé de  $\Sigma$  ou de  $\Sigma'$ , notons  $\tilde{\Sigma}_1$  et  $\tilde{\Sigma}_2$  ces relevés,  $G_1$  et  $G_2 \subset \rho(\pi_1(M))$  leur stabilisateurs et  $\tilde{C}_1$  et  $\tilde{C}_2$  les enveloppes convexes de  $L_{G_1} \cap L_{G_2}$  dans  $\tilde{\Sigma}_1$  et  $\tilde{\Sigma}_2$ . Comme le bord de  $F \times \partial I$  est géodésique, les composantes de  $\tilde{F} \times \partial I$  sont les enveloppes convexes dans  $\tilde{\Sigma}_1$  et  $\tilde{\Sigma}_2$  du stabilisateur  $\Gamma_{\tilde{F}} \subset \rho(\pi_1(M))$  de  $\tilde{V}$  ; en particulier  $F \times \partial I \subset C_1 \cup C_2$ . Par construction  $C_1 \cup C_2$  est isotope au bord d'une composante  $W_j$  de  $W$  et on vient de montrer que  $F \times \partial I$  peut être isotopé dans le bord de  $W_j$ . D'après [Joh], il s'en suit que  $V$  peut être isotopé dans cette composante  $W_j$  de  $W$  (si  $V$  est un anneau, ceci vient du fait que  $M$  ne contient pas de tores essentiels).

On vient de montrer que tout  $I$ -fibré essentiel peut être isotopé dans  $W$ . Montrons ensuite qu'aucune composante de  $W$  ne peut être isotopée dans une autre composante de  $W$ . Soient  $W_1$  et  $W_2$  deux composantes de  $W$  et  $\tilde{W}_1$  et  $\tilde{W}_2 \subset \tilde{M}$  des relevés de  $W_1$  et  $W_2$  ;  $\partial \tilde{W}_1 \cap \partial \tilde{M}$  est contenu dans des relevés  $\tilde{\Sigma}_1, \dots, \tilde{\Sigma}_p$  ( $p = 2$  si  $W_1$  est un  $I$ -fibré essentiel) de  $\Sigma$  ou  $\Sigma'$  et  $\partial \tilde{W}_2 \cap \partial \tilde{M}$  est contenu dans des relevés  $\tilde{\Sigma}_{p+1}, \dots, \tilde{\Sigma}'_q$  de  $\Sigma$  ou  $\Sigma'$ . Par construction l'un au moins des  $\tilde{\Sigma}_{p+1}, \dots, \tilde{\Sigma}'_q$  (considérons que c'est  $\tilde{\Sigma}'_q$ ) n'appartient pas à la famille  $\tilde{\Sigma}_1, \dots, \tilde{\Sigma}_p$ . Également par construction, il existe un anneau  $E \subset W_2$  essentiel dans  $(M, \Sigma \cup \Sigma')$  tel qu'un relevé  $\tilde{E}$  de  $E$  possède une composante de bord contenue dans  $\tilde{\Sigma}'_q$ . Comme  $\tilde{\Sigma}'_q$  n'est pas un élément de  $\{\tilde{\Sigma}_1, \dots, \tilde{\Sigma}_p\}$ ,  $\tilde{E}$  ne peut pas être isotopé dans  $\tilde{W}_1$ , donc  $\tilde{W}_2$  ne peut pas être isotopé dans  $\tilde{W}_1$ . En appliquant ce raisonnement à tous les relevés de  $W_1$  et de  $W_2$  on montre que  $W_2$  ne peut pas être isotopé dans  $W_1$ . On a ainsi montré qu'aucune composante de  $W$  ne peut être isotopée dans une autre composante de  $W$  ce qui conclut la preuve de la proposition 2.1.  $\square$

## 2.2 Bouts des feuilles des laminations de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$

Nous allons commencer dans cette section l'étude des laminations géodésiques mesurées contenues dans  $\mathcal{P}(M)$ . En premier lieu, nous allons nous intéresser aux laminations qui satisfont la condition  $c$ ) et intersectent transversalement toutes les courbes paraboliques de  $\partial M$ .

**Lemme 2.2.1.** *Soient  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$  une lamination géodésique mesurée satisfaisant la condition  $c$ ) et  $S \subset \partial M$  une surface compacte compressible dont le bord n'intersecte pas  $|\lambda|$  transversalement. Alors il existe un système admissible de méridiens contenu dans  $S$  vers lequel  $S$  ne contient pas d'arc de compression disjoint de  $|\lambda|$ .*

*Démonstration.* D'après la condition  $c$ ), comme  $\partial S$  n'intersecte pas  $|\lambda|$ ,  $\partial S$  ne contient pas de méridiens. Soit  $C$  un système admissible de méridiens de  $S$  (dont l'existence est assuré par l'affirmation 1.5.2) ; si  $S$  contient un arc de compression  $k$  vers un méridien  $c_0 \subset C$  avec  $k$  disjoint de  $|\lambda|$ , alors, par chirurgie le long de cet arc, on obtient deux méridiens  $c_1$  et  $c_2$  tels que le système  $C'$  obtenu en remplaçant  $c_0$  par  $c_1$  ou  $c_2$  (considérons que c'est  $c_1$ ) est un système admissible. On a alors  $i(\lambda, c_1) + i(\lambda, c_2) \leq i(\lambda, c_0)$  donc  $i(\lambda, C') \leq i(\lambda, C) - i(\lambda, c_2) \leq i(\lambda, C) - 2\pi$ . En itérant cette opération un nombre fini de fois, on obtient un système admissible de méridiens vers lequel  $S$  ne contient pas d'arc de compression disjoint de  $|\lambda|$ .  $\square$

Si  $L$  est une lamination géodésique qui n'intersecte pas transversalement  $|\lambda|$ , nous verrons par la suite (lemme 2.2.3) que cette propriété permet de définir les bouts des relevés des feuilles de  $L$ . Dans l'immédiat, nous allons décrire une manière d'étendre ce système admissible pour obtenir une multi-courbe par rapport à laquelle  $L$  est en position prétendue.

**Lemme 2.2.2.** *Soient  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui satisfait la condition c) et intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques de  $\partial M$  et  $L$  une lamination géodésique connexe qui n'intersecte pas  $|\lambda|$  transversalement; alors, si  $S(L)$  n'est pas un anneau, il existe une multi-courbe  $C \subset S(L)$  par rapport à laquelle  $L$  est en position prétendue.*

*De plus, si  $S(L)$  est compressible (respectivement contient une courbe parabolique), la multi-courbe  $C$  contient un système admissible de méridiens  $C_0 \subset S(L)$  (respectivement contient une courbe parabolique).*

*Démonstration.* Comme  $|\lambda|$  n'intersecte pas  $L$  transversalement,  $|\lambda| \cap S(L) \subset L$ .

Si  $S(L)$  est incompressible, notons  $C \subset S(L)$  une multi-courbe telle que chaque feuille de  $L$  intersecte transversalement au moins une feuille de  $C$ ; comme  $S(L)$  est incompressible,  $C$  est en position prétendue par rapport à  $L$ . Si  $S(L)$  contient une courbe parabolique  $c$ , par hypothèse  $|\lambda|$  intersecte  $c$  transversalement donc  $L$  intersecte  $c$  transversalement et on peut choisir  $C$  de façon que  $c \subset C$ .

Si  $S(L)$  est compressible, considérons un système admissible de méridiens  $C_0 \subset S(L)$  fourni par le lemme 2.2.1.

Si une sous-lamination minimale  $L^1$  de  $L$  n'intersecte pas  $C_0$ , notons  $S'$  la surface incompressible obtenue en ajoutant à la composante de  $S(L) - C_0$  qui contient  $L^1$  un disque le long de chaque composante de  $C_0$  et  $Q$  la multi-courbe réunion des feuilles compactes de  $L$  contenues dans  $S'$  et des bords effectifs  $\partial \bar{S}(L^i)$  des surfaces embrassées par les minimaux exceptionnels  $L^i$  de  $L$  contenus dans  $S$ . Comme  $|\lambda| \cap S(L) \subset L$ ,  $Q$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement et, d'après la condition c), ses feuilles sont incompressibles. Chaque feuille de  $Q$  correspond donc à un élément non nul de  $\pi_1(S')$ . On en déduit que  $S'$  n'est pas une sphère et qu'il existe une multi-courbe incompressible  $C_1 \subset S' \cap \partial M$  telle que chaque composante de  $Q$  intersecte au moins une composante de  $C_1$  de façon essentielle (ce qui signifie ici que si  $\hat{S}'$  est le revêtement universel de  $S'$ , la préimage de  $C_1$  sépare dans  $\hat{S}'$  les deux bouts de chaque composante  $\hat{Q}^j$  de la préimage de  $Q$ ). Si  $L \cap S'$  contient un arc de compression vers une composante  $c_1^1$  de  $C_1$ , par chirurgie le long de cet arc, on obtient un disque essentiel  $D$  et une géodésique  $c_2^1$  tels que  $i(\partial c_2^1, \lambda) \leq i(\partial c_1^1, \lambda) - i(\partial D, \lambda) \leq i(\partial c_1^1, \lambda) - 2\pi$ . Remplaçons  $c_1^1$  par  $c_2^1$  et notons  $C_2$  la multi-courbe ainsi obtenue. En itérant cette opération un nombre fini de fois, on obtient une nouvelle multi-courbe  $C_3$  vers laquelle  $L \cap S'$  ne contient pas d'arc de compression. Comme chaque composante  $c_3^j$  de  $C_3$  est obtenue à partir d'une composante  $c_1^j$  de  $C_1$  par chirurgie le long d'arcs de compression,  $C_3$  est librement homotope à  $C_1$  sur  $S'$ . Du fait que chaque composante de  $Q$  intersecte au moins une composante de  $C_1$  de façon essentielle on déduit alors que chaque composante de  $Q$  intersecte transversalement une composante de  $C_3$  et il s'en suit que  $L^1$  intersecte  $C_3$ . En opérant ainsi pour chaque composante de  $\partial M - C_0$ , on obtient une multi-courbe  $C = C_0 \cup C_3$  par rapport à laquelle  $L$  est en position prétendue.  $\square$

**Remarque.** Si  $M$  est un bretzel et si  $S(L) = \partial M$ , alors la variété obtenue en découpant  $M$  le long de disques bordés par les composantes du système admissible de méridiens  $C_0$  produit par le lemme 2.2.2 est une boule. Par conséquent si une sous-lamination minimale  $L^1$  de  $L$  n'intersecte pas  $C_0$  transversalement, les composantes de  $\partial \bar{S}(L^1)$  sont des méridiens. On a alors une contradiction entre le fait que  $|\lambda|$  n'intersecte pas  $L$  transversalement et la condition c). On en déduit que  $L$  est en position prétendue par rapport à  $C_0$ ; dans ce cas-là, on peut donc choisir  $C = C_0$ .  $\diamond$

Nous allons maintenant étudier les bouts des feuilles de la préimage dans  $\partial\tilde{M}$  d'une lamination  $\lambda \subset \partial M$ .

**Lemme 2.2.3.** *Soient  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui satisfait la condition c) et intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques de  $\partial M$  et  $l$  une géodésique simple qui n'intersecte pas  $|\lambda|$  transversalement; alors chaque relevé de  $l$  à  $\partial\tilde{M}$  a deux bouts bien définis et distincts dans  $\partial\tilde{M}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\bar{l}$  l'adhérence de  $l$  dans  $\partial M$ ; c'est une lamination géodésique qui contient une ou deux sous-laminations minimales que nous noterons  $L_+$  et  $L_-$  (avec éventuellement  $L_+ = L_-$ ). Comme  $l$  n'intersecte pas  $|\lambda|$  transversalement,  $L_+$  et  $L_-$  n'intersectent pas non plus  $|\lambda|$  transversalement. On a donc  $i(\partial'\bar{S}(\bar{l}), \lambda) = 0 = i(\partial'\bar{S}(L_+), \lambda) = i(\partial'\bar{S}(L_-), \lambda)$ .

Si  $S(\bar{l})$  est incompressible et ne contient pas de courbes paraboliques, l'affirmation 2.2.3 est une conséquence du lemme 2.1.1.

Sinon  $S(\bar{l})$  contient un méridien ou une courbe parabolique et l'affirmation suivante va nous permettre d'exploiter le système admissible de méridiens produit au lemme 2.2.1

**Affirmation 2.2.4.** *Soient  $L \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  une lamination géodésique minimale,  $l$  une feuille de  $L$  et  $c$  une géodésique simple compacte qui est un méridien ou une courbe parabolique et par rapport à laquelle  $L$  est en position prétendue; alors les relevés de  $l$  à  $\partial\tilde{M}$  ont deux bouts bien définis dans  $\overline{\partial\tilde{M}}$ . De plus, si  $c$  est un méridien, ou si  $c \cup L$  est contenu dans une surface incompressible, ces deux bouts sont distincts.*

*Démonstration.* Comme  $L$  est en position prétendue par rapport à  $c$ , la feuille  $l$  intersecte  $c$  transversalement. Soient  $\tilde{l} \subset \tilde{M}$  un relevé de  $l$  et  $\tilde{c}$  un relevé de  $c$ ; si  $\tilde{k}$  est un arc de  $\tilde{l}$  tel que  $\tilde{k} \cap \tilde{c} = \partial\tilde{k}$ , alors le projeté  $k \subset L$  de  $\tilde{k}$  est un arc de compression vers  $c$ . On en déduit que  $\tilde{l}$  intersecte au plus une fois chaque relevé de  $c$ . Considérons l'ensemble  $(\tilde{c}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  des relevés de  $c$  qui intersectent  $\tilde{l}$ , indexés par l'ordre le long de  $\tilde{l}$ . Notons  $\bar{c}_i$  l'adhérence de  $\tilde{c}_i$  dans  $\overline{\partial\tilde{M}} \approx S^2$ ; chaque courbe  $\bar{c}_i$  est une courbe de Jordan et borde un fermé  $F_i$  de  $\overline{\partial\tilde{M}}$  tel que les fermés  $F_i$  vérifient :

- pour  $|i| > |j|$  et  $ij > 0$ ,  $F_i \subsetneq F_j$ ;
- le diamètre des  $F_{|i|}$  pour la distance sphérique tend vers 0 lorsque  $|i|$  tend vers  $\infty$ ;
- $\sharp(F_i \cap F_j) \leq 1$  pour  $j < 0 < i$ .

Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , la feuille  $\tilde{l}$  coupe exactement une fois  $\partial F_i$ ,  $\tilde{l}$  a donc deux bouts bien définis  $\bigcap_{i>0} F_i$  et  $\bigcap_{i<0} F_i$ .

Si  $c$  borde un méridien,  $F_i \cap F_j = \emptyset$  pour  $j < 0 < i$ , ces deux bouts sont donc distincts.

Considérons enfin le cas où  $c$  est une courbe parabolique et où il existe une surface incompressible  $\Sigma \subset \partial M$  qui contient  $c \cup L$ . Supposons qu'il existe  $j < i$  tels que  $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ ; on a alors  $\partial F_j \cap \partial F_{j+1} \neq \emptyset$ . Soit  $\tilde{k}$  le segment de  $\tilde{l}$  qui joint  $c_j$  à  $c_{j+1}$  et  $c'$  la courbe simple union de la projection  $k$  de  $\tilde{k}$  sur  $\partial M$  et d'un segment de  $c$  joignant les extrémités de  $k$ . Les éléments de  $\rho(\pi_1(M))$  correspondant à  $c$  et à  $c'$  sont des isométries paraboliques qui fixent  $\partial F_j \cap \partial F_{j+1}$  et donc commutent. Comme  $\Sigma$  est incompressible, ceci entraîne que  $\pi_1(S(L))$  contient un groupe abélien de rang 2, ce qui est impossible. On en déduit que pour  $j < 0 < i$ ,  $F_i \cap F_j = \emptyset$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Déduisons-en que tout relevé de  $l$  a deux bouts distincts dans  $\overline{\partial\tilde{M}}$ . Si  $S(L_+)$  est compressible, d'après le lemme 2.2.2,  $S(L_+)$  contient un méridien par rapport auquel  $L_+$  est en position prétendue. Le fait 2.2.4 entraîne alors que tout relevé d'une feuille de  $L_+$  a deux bouts bien définis dans  $\overline{\partial\tilde{M}}$ . On en déduit que toute demi-feuille qui spirale sur une feuille de  $L_+$  a un bout bien défini.

Si  $S(L_+)$  est incompressible il en est de même, d'après le lemme 2.2.2 et l'affirmation 2.2.4 si  $S(L_+)$  contient une courbe parabolique et d'après le lemme 2.1.1 sinon.



On vient de montrer que tout relevé de  $l$  a deux bouts bien définis dans  $\overline{\partial\tilde{M}}$ ; montrons que ces deux bouts sont distincts. D'après le lemme 2.2.2, il existe une multi-courbe  $C \subset S(\bar{l})$  par rapport à laquelle  $\bar{l}$  est en position prétendue et une feuille  $c$  de  $C$  est un méridien ou une courbe parabolique. Notons  $\tilde{l}$  et  $\tilde{c}$  des relevés de  $l$  et  $c$  qui s'intersectent. Comme  $l$  ne contient pas d'arc de compression vers  $c$ ,  $\tilde{l}$  et  $\tilde{c}$  s'intersectent en un seul point. Si  $c$  est un méridien, on en déduit que  $\tilde{c}$  sépare les deux bouts de  $\tilde{l}$ . Si  $S(l)$  est compressible, on peut choisir un méridien pour  $c$ , il nous reste donc le cas où  $c$  est une courbe parabolique et  $S(\bar{l})$  est incompressible. Dans ce cas, les arguments de la fin de la preuve de l'affirmation 2.2.4, montrent que les adhérences de  $\tilde{l}$  et de  $\tilde{c}$  s'intersectent en un seul point. On en déduit que l'adhérences de  $\tilde{c}$  sépare les deux bouts de  $\tilde{l}$ .  $\square$

### 2.3 Equivalence entre les définitions de $\mathcal{P}(M)$

Dans cette section, nous allons présenter d'autres manières de définir  $\mathcal{P}(M)$ . En particulier nous allons introduire les conditions  $b_1)$  et  $b_2)$ . Ces nouvelles définitions nous seront utiles dans la preuve du théorème C.

Deux feuilles distinctes  $\tilde{l}_1$  et  $\tilde{l}_2$  d'une lamination géodésique  $\tilde{L} \subset \partial\tilde{M}$  sont dites biasymptotes si chacune d'elles a deux bouts bien définis dans  $\tilde{M}$  et si leurs adhérences dans  $\partial\tilde{M}$  ont les deux mêmes bouts. Une lamination géodésique  $L \in \mathcal{L}(\partial M)$  dont la préimage  $p^{-1}(L) \subset \partial\tilde{M}$  contient deux feuilles biasymptotes sera dite annulaire. Par exemple le bord d'un anneau ou d'un ruban de Möbius essentiel qui ne contient pas de courbe parabolique est une lamination géodésique annulaire. Une lamination géodésique  $L$  sera dite anannulaire si  $L$  intersecte transversalement toutes les laminations géodésiques annulaires et toutes les courbes paraboliques de  $\partial M$ .

**Proposition 2.2.** *Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée vérifiant les conditions a) et c); alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- b)  $\exists \eta > 0$  tel que, pour tout anneau essentiel  $E$ ,  $i(\partial E, \lambda) \geq \eta$ ;
- $b_1)$  la lamination géodésique  $\lambda$  est anannulaire;
- $b_2)$  l'intersection des adhérences dans  $\overline{\partial\tilde{M}}$  de deux composantes connexes du complémentaire de  $p^{-1}(\lambda)$  dans  $\partial\tilde{M}$  est soit vide, soit l'adhérence d'une feuille  $\tilde{l} \subset p^{-1}(\lambda)$  dont la projection sur  $\partial M$  est une feuille compacte.

*Démonstration.* Nous allons découper cette preuve en plusieurs lemmes

### 2.4 Limites d'anneaux et laminations anannulaires

Commençons par comparer les conditions b) et  $b_1)$ .

**Lemme 2.4.1.** *Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée vérifiant les conditions a) et c); alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- b) la lamination géodésique  $\lambda$  est anannulaire;
- $b_1)$   $\exists \eta > 0$  tel que, pour tout anneau essentiel  $E$ ,  $i(\partial E, \lambda) \geq \eta$ .

*Démonstration.* Comme une lamination qui vérifie les conditions b),  $b_1)$  et  $b_2)$  intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques, nous supposons dans la suite que  $\lambda$  intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques.

i) Montrons tout d'abord la contraposé de  $b_1) \Rightarrow b$ . Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui vérifie les conditions a), c) et intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques;

supposons que  $\lambda$  ne vérifie pas la condition  $b$ ). Il existe alors une lamination annulaire  $A$  qui n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement. Nous allons utiliser  $A$  pour construire, pour tout  $\varepsilon > 0$ , un anneau essentiel  $E_\varepsilon$  tel que  $i(\lambda, \partial E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ . Ceci contredira la condition  $b_1$ ).

Soient  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \subset p^{-1}(A)$  deux feuilles biasymptotes,  $\tilde{l}_1^+ \subset \tilde{l}_1$  et  $\tilde{l}_2^+ \subset \tilde{l}_2$  deux demi-géodésiques qui ont le même bout  $\xi^+$ ; notons  $l_1, l_2, l_1^+$  et  $l_2^+$  les projetés de  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_1^+$  et  $\tilde{l}_2^+$  sur  $\partial M$ . Soient  $A_1^+$  et  $A_2^+$  les laminations géodésiques minimales contenues dans les adhérences  $\bar{l}_1^+$  et  $\bar{l}_2^+$  de  $l_1^+$  et  $l_2^+$ , avec éventuellement  $A_1^+ = A_2^+$ ; raccourcissons  $l_1^+$  et  $l_2^+$  de façon à avoir  $l_j^+ \subset S(A_j)$ . Comme  $A_1^+ \cup A_2^+ \subset A$ , ni  $A_1^+$ , ni  $A_2^+$  n'intersectent  $|\lambda|$  transversalement et  $i(\partial' \bar{S}(A_1^+), \lambda) = i(\partial' \bar{S}(A_2^+), \lambda) = 0$ .

Nous allons construire une multi-courbe  $c^+$  qui est un méridien, une courbe parabolique ou borde un anneau ou un ruban de Möbius essentiel et par rapport à laquelle  $A_1^+ \cup A_2^+$  est en position prétendue.

Si  $S = \bar{S}(A_1^+) \cup \bar{S}(A_2^+)$  contient un méridien ou une courbe parabolique, alors d'après le lemme 2.2.2 et l'affirmation 1.5.4,  $S$  contient un méridien ou une courbe parabolique  $c^+$  vers lequel  $S$  ne contient pas d'arc de compression disjoint de  $A_1^+ \cup A_2^+$ . L'hypothèse que  $\lambda$  vérifie la condition  $c$ ) et intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques implique que  $c^+$  intersecte  $\lambda$  transversalement. Comme ni  $A_1^+$ , ni  $A_2^+$  n'intersecte  $\lambda$ , le fait que  $A_j^+$  est arationnelle dans  $S(A_j^+)$  (affirmation 1.3.3) entraînent que  $c^+$  intersecte transversalement  $A_1^+$  ou  $A_2^+$ . D'après l'affirmation 2.2.4, il existe une famille de fermés  $F_i \subset \overline{\partial M}$  bordés par les adhérences de relevés de  $c^+$  tels que  $\xi^+ = \bigcap_i \overset{\circ}{F}_i$ . Comme  $\xi^+$  est le bout de  $\tilde{l}_1^+$  et de  $\tilde{l}_2^+$ ,  $l_1^+$  et  $l_2^+$  intersectent  $c^+$ . Il s'en suit que chaque feuille de  $A_1^+ \cup A_2^+$  intersecte  $c^+$  transversalement. On a vu plus haut que  $S$  ne contient pas d'arc de compression vers  $c^+$  qui soit disjoint de  $A_1^+ \cup A_2^+$  donc  $A_1^+ \cup A_2^+$  est en position prétendue par rapport à  $c^+$ .

Si  $S$  est incompressible et ne contient pas de courbes paraboliques, d'après la proposition 2.1, il existe un anneau ou ruban de Möbius essentiel  $E$  avec  $\partial E \subset S$ . Si  $\partial E$  n'intersecte pas  $A_1^+ \cup A_2^+$  transversalement, alors  $i(\partial E, \lambda) = 0$  et on a la contradiction avec la condition  $b_1$ ) qui était attendue.

Si  $\partial E$  intersecte  $A_1^+ \cup A_2^+$  transversalement, notons  $c^+ = \partial E$ . Comme  $A_1^+ \cup A_2^+$  ne contient pas d'arcs de compression vers  $c^+$ , les mêmes arguments que lorsque  $c^+$  est un méridien, montrent que  $A_1^+ \cup A_2^+$  est en position prétendue par rapport à  $c^+$ .

Nous avons maintenant une multi-courbe  $c^+$  qui est un méridien, une courbe parabolique ou borde un anneau ou un ruban de Möbius essentiel et par rapport à laquelle  $l_1^+ \cup l_2^+$  est en position prétendue.

Considérons deux demi-feuilles  $\tilde{l}_1^-$  et  $\tilde{l}_2^-$  de  $\tilde{l}_1$  et  $\tilde{l}_2$  telles que  $\tilde{l}_1^+ \cap \tilde{l}_1^- = \emptyset$  et  $\tilde{l}_2^+ \cap \tilde{l}_2^- = \emptyset$ . En suivant un raisonnement analogue, on construit une multi-courbe  $c^-$  qui est un méridien, une courbe parabolique ou borde un anneau ou un ruban de Möbius essentiel et par rapport à laquelle  $l_1^- \cup l_2^-$  est en position prétendue.

Paramétrons  $\tilde{l}_1$  et  $\tilde{l}_2$  par  $\mathbb{R}$  avec  $\tilde{l}_j^+ \subset \tilde{l}_j(\mathbb{R}^+)$  et  $\tilde{l}_j^- \subset \tilde{l}_j(\mathbb{R}^-)$ . Considérons les suites  $\dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots$  et  $\dots < y_{-1} < y_0 < y_1 < \dots$  de tous les réels tels que, pour tout  $n > 0$ ,  $\tilde{l}_1^+(x_n)$  et  $\tilde{l}_2^+(y_n)$  sont dans un même relevé de  $c^+$  et  $\tilde{l}_1^-(x_{-n})$  et  $\tilde{l}_2^-(y_{-n})$  sont dans un même relevé de  $c^-$ . Comme  $l_1^+ \cup l_2^+$  est en position prétendue par rapport à  $c^+$ ,  $\tilde{l}_1^+$  (respectivement  $\tilde{l}_2^+$ ) intersecte au plus une fois chaque relevé de  $c^+$ . Cet argument est aussi valable pour  $l_1^- \cup l_2^-$  et  $c^-$ , il existe donc  $N_0$  tel que pour  $n \geq N_0$ ,  $x_n, x_{-n}, y_n$  et  $y_{-n}$  sont bien définis, ce qui sera suffisant pour la suite. Notons  $d(l(x_n), l(y_n))$  la distance de  $l(x_n)$  à  $l(y_n)$  mesurée sur  $c^+$  (si  $c^+$  borde un anneau essentiel et si  $l(x_n)$  et  $l(y_n)$  appartiennent à deux composantes différentes de  $c^+$ , on conviendra que  $d(l(x_n), l(y_n)) = \infty$ ).

Supposons qu'il existe  $\psi, \psi' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissantes et telles que  $\lim_{\psi(n) \rightarrow +\infty} d(l(x_{\psi(n)}), l(y_{\psi(n)})) = 0$  et  $\lim_{\psi'(n) \rightarrow +\infty} d(l(x_{-\psi'(n)}), l(y_{-\psi'(n)})) = 0$  (en particu-

lier,  $l_1$  et  $l_2$  sont contenues dans la même composante connexe de  $\partial M$ ). Pour simplifier les notations, on va considérer que  $\psi(n) = \psi'(n) = n$ , mais le raisonnement qui suit est valable en toute généralité. Soient  $\zeta > 0$  et  $\tilde{I}_n$  et  $\tilde{I}_{-n}$  des segments de longueurs inférieures à  $\zeta$  joignant  $\tilde{l}_1(x_n)$  à  $\tilde{l}_2(y_n)$  et  $\tilde{l}_1(x_{-n})$  à  $\tilde{l}_2(y_{-n})$ . D'après la condition a), pour  $\zeta$  suffisamment petit, on a  $i(\tilde{I}_n, \lambda) + i(\tilde{I}_{-n}, \tilde{\lambda}) \leq 2\pi$ . La courbe  $\tilde{d}_n = \tilde{I}_n \cup \tilde{l}_1[x_{-n}, x_n] \cup \tilde{I}_{-n} \cup \tilde{l}_2[y_{-n}, y_n]$  borde une disque dans  $\tilde{M}$  et vérifie  $\int_{\tilde{d}_n} d\tilde{\lambda} \leq 2\pi$ . D'après la condition c), cette courbe est homotope à un point dans  $\tilde{M}$ .

Montrons par l'absurde que pour  $n$  assez grand  $\tilde{d}_n$  ne borde pas de disque dans  $\partial\tilde{M}$ . Supposons donc qu'il existe une suite extraite telle que  $\tilde{d}_n$  borde un disque  $\tilde{D}_n \subset \partial\tilde{M}$ . Fixons  $n_0 \in \mathbb{N}$  et notons  $\tilde{c}_{n_0}^+$  la composante de  $p^{-1}(c^+)$  qui contient  $\tilde{l}_1(x_{n_0})$ . Soient  $\hat{c}_{n_0}^+$  et  $\hat{l}_1$  des relevés de  $\tilde{c}_{n_0}^+$  et  $\tilde{l}_1$  au revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de la composante de  $\partial M$  qui contient  $l_1$  et  $l_2$  tels que  $\hat{c}_{n_0}^+$  et  $\hat{l}_1$  s'intersectent en un point  $\hat{x}_{n_0}$ . Pour  $n \geq n_0$ , relevons  $\tilde{D}_n$  en un disque  $\hat{D}_n$  qui contient  $\hat{x}_{n_0}$ . Le bord de  $\hat{D}_n$  est composé d'un segment de  $\hat{l}_1$ , d'un segment contenu dans un relevé  $\hat{l}_{2,n}$  de  $l_2$  et de deux segments  $\hat{I}_n$  et  $\hat{I}_{-n}$  relevés de  $\tilde{I}_n$  et  $\tilde{I}_{-n}$  (cf figure 2.1).

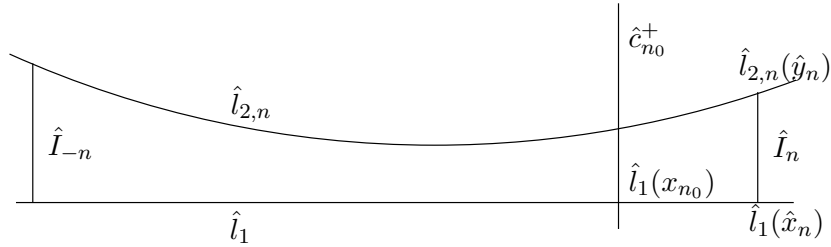


FIG. 2.1 – Le disque  $\hat{D}_n$ .

Comme  $l(\hat{I}_{\pm n}) \rightarrow 0$  et que la fonction distance entre deux géodésiques paramétrées par leurs longueurs est convexe,  $\hat{c}_{n_0}^+$  intersecte  $\hat{l}_{2,n}$  en un point  $\hat{y}_n$  tel que  $d(\hat{l}_1(x_{n_0}), \hat{y}_n) \rightarrow 0$ . On a vu plus haut que  $\tilde{c}_{n_0}^+$  intersecte  $\tilde{l}_2$  en un seul point,  $\hat{y}_n$  se projette donc sur  $\tilde{l}_2(y_{n_0})$ . On en déduit que  $d(\tilde{l}_1(x_{n_0}), \tilde{l}_2(y_{n_0})) = 0$  ce qui contredit le fait que  $\tilde{l}_1$  et  $\tilde{l}_2$  sont disjointes.

Pour  $n$  assez grands,  $d_n = p(\tilde{d}_n)$  représente donc un élément non nul de  $\pi_1(\partial M)$ . Comme  $\tilde{d}_n$  borde un disque dans  $\tilde{M}$ , d'après le théorème du lacet ([He]) il existe un méridien  $d'_n$  tel que  $i(\lambda, d'_n) \leq \int_{d_n} d\lambda \leq 2\pi$  ce qui contredit c).

On en déduit qu'il existe  $\zeta > 0$  tel que  $d(l(x_n), l(y_n)) > \zeta$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$  ou  $d(l(x_{-n}), l(y_{-n})) > \zeta$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ . Considérons par exemple que  $d(l(x_n), l(y_n)) > \zeta$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ . Nous allons modifier légèrement des arguments dus à G. Kleineidam et J. Souto [KIS] pour construire, pour  $\varepsilon$  donné, un anneau ou un ruban de Möbius essentiel  $E_\varepsilon$  tel que  $i(\partial E_\varepsilon, \lambda) \leq \varepsilon$ .

Comme  $l_1^+ \cup l_2^+$  est en position prétendue par rapport à  $c^+$ , on a, pour tout  $i < j$  :

1. les vecteurs  $\frac{d}{dt}l_2^+(y_i)$  et  $\frac{d}{dt}l_1^+(x_i)$  sont dirigés du même côté de  $c^+$  (à savoir le côté du fermé  $F_i$  de l'affirmation 2.2.4) ;
2. les courbes  $l_1^+[x_i, x_j]$  et  $l_2^+[y_i, y_j]$  représentent le même élément du  $\pi_1$  relatif  $\pi_1(M, c^+)$  (respectivement  $\pi_1(M, E)$  lorsque  $c^+$  borde un anneau ou ruban de Möbius  $E$ ).

Considérons tout d'abord le cas où  $A_1^+$  est une courbe simple. Soient  $l$  une feuille de  $A_2^+$  telle qu'un relevé  $\tilde{l}$  de  $l$  à  $\partial\tilde{M}$  a un bout  $\xi^+$  commun avec un relevé  $\tilde{A}_1^+$  de  $A_1^+$  et  $g$  un élément de  $\rho(\pi_1(M))$  qui laisse  $\tilde{A}_1^+$  invariant et dont le point fixe répulsif est  $\xi^+$ . Les géodésiques  $g^n\tilde{l} \subset p^{-1}(l)$  ont deux bouts,  $g^n\xi^+ = \xi^+$  et  $\xi_n = g^n\xi^-$  dans  $\partial\tilde{M}$  et  $(\xi_n)$  converge vers le point fixe attractif de  $g$ . On en déduit que, quitte à extraire,  $g^n\tilde{l}$  converge vers une géodésique  $\tilde{l}' \subset p^{-1}(A_2^+)$  invariante par  $g$ . La feuille  $l' = p(\tilde{l}')$  est compacte donc  $A_2^+ = l'$ .

Si  $A_1^+ = A_2^+$ , alors, comme  $d(l_1^+(x_i), l_2^+(y_i)) > \zeta$ ,  $A$  borde un ruban de Möbius essentiel  $E$  avec  $i(\partial E, \lambda) = i(A, \lambda) = 0$ . Sinon, d'après l'affirmation 2.1.5, il existe un anneau essentiel  $E$  tel que  $\partial E = A_1^+ \cup A_2^+$ , donc  $i(\partial E, \lambda) = 0$ .

Si  $A_1^+$  n'est pas une courbe simple, d'après ce qui précède,  $A_1^+$  et  $A_2^+$  sont des minimaux exceptionnels. Chacun d'eux contient au moins une feuille qui n'est isolée d'aucun côté. On a alors l'affirmation suivante :

**Affirmation 2.4.2.** *Pour tout  $\varepsilon' > 0$ , il existe  $0 < i < j$  tels que l'on a l'un des deux cas suivants :*

*Cas I :*

- $d(l_1^+(x_i), l_2^+(x_j)) < \varepsilon'$  et  $d(l_2^+(y_i), l_1^+(y_j)) < \varepsilon'$  ;
- les vecteurs  $\frac{d}{dt}l_1^+(x_i)$  et  $\frac{d}{dt}l_1^+(x_j)$  sont dirigés du même côté de  $c^+$  ;
- $\forall k \in \{i + 1, \dots, j - 1\}$ ,  $l_1^+(x_k)$  et  $l_2^+(y_k)$  n'appartiennent pas à  $[l_1^+(x_i), l_1^+(x_j)] \cup [l_2^+(y_i), l_2^+(y_j)] \subset c^+$ .

*Cas II :*

- $d(l_1^+(x_i), l_2^+(y_j)) < \varepsilon'$  et  $d(l_2^+(y_i), l_1^+(x_j)) < \varepsilon'$  ;
- les vecteurs  $\frac{d}{dt}l_1^+(x_i)$  et  $\frac{d}{dt}l_2^+(y_j)$  sont dirigés du même côté de  $c^+$  ;
- $\forall k \in \{i + 1, \dots, j - 1\}$ ,  $l_1^+(x_k)$  et  $l_2^+(y_k)$  n'appartiennent pas à  $[l_1^+(x_i), l_2^+(y_j)] \cup [l_2^+(y_i), l_1^+(x_j)] \subset c^+$ .

Notons que ce cas n'apparaît que si  $l_1$  et  $l_2$  sont dans la même composante de  $\partial M$ .

*Démonstration.* Pour trouver un tel couple  $i < j$ , on procède de la manière suivante. Comme  $A_1^+$  contient une feuille qui n'est isolée d'aucun côté, il existe un point  $x \in A_1^+ \cap c^+$  tel qu'une suite de points de  $l_1^+ \cap c^+$  situés à gauche de  $x$  converge vers  $x$  et qu'une suite de points de  $l_1^+ \cap c^+$  situés à droite de  $x$  converge aussi vers  $x$ . Considérons deux points  $a = l_1^+(x_l)$  ou  $l_2^+(y_l)$  et  $b = l_1^+(x_s)$  ou  $l_2^+(y_s)$  situés de part et d'autre de  $x$  et tels que  $d(a, b) < \varepsilon'$  et que  $\forall k \in \{l + 1, \dots, s - 1\}$ ,  $l_1^+(x_k)$  et  $l_2^+(y_k)$  n'appartiennent pas à  $[a, b] \subset c^+$ . Si les vecteurs  $\frac{d}{dt}(l_1 \cup l_2)|_a$  et  $\frac{d}{dt}(l_1 \cup l_2)|_b$  sont dirigés du même côté de  $c^+$ , alors on prend  $i = l$  et  $j = s$ . Sinon il existe un point  $c = l_1^+(x_t)$  ou  $l_2^+(y_t)$  de  $[a, b]$  tel que  $\forall k \in \{l + 1, \dots, t - 1\} - \{s\}$ ,  $l_1^+(x_k)$  et  $l_2^+(y_k)$  n'appartiennent pas à  $[a, b]$ . On prend alors  $j = t$  et  $i = l$  si les vecteurs  $\frac{d}{dt}(l_1 \cup l_2)|_a$  et  $\frac{d}{dt}(l_1 \cup l_2)|_c$  sont dirigés du même côté de  $c^+$  et  $i = s$  sinon.

On a ainsi  $i, j$  vérifiant les deux premières conditions et un segment parmi  $[l_2^+(x_i), l_2^+(x_j)]$ ,  $[l_2^+(y_i), l_2^+(y_j)]$ ,  $[l_1^+(x_i), l_2^+(y_j)]$  et  $[l_2^+(y_i), l_1^+(x_j)]$  qui ne contient aucun des  $l_1^+(x_k)$  et  $l_2^+(y_k)$  pour  $k \in \{i + 1, \dots, j - 1\}$ .

Montrons que la troisième propriété est satisfaite dans chacun des deux cas. Comme l'adhérence de  $\tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2$  dans  $\partial \tilde{M}$  est une courbe de Jordan, elle borde un disque fermé  $O \subset \partial \tilde{M}$ . Montrons que pour tout  $g \in \rho(\pi_1(M))$ , l'adhérence de  $\tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2$  n'intersecte pas l'adhérence de  $g(\tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2)$ . Comme  $l_1$  et  $l_2$  sont des géodésiques simples qui ne s'intersectent pas transversalement,  $\tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2$  et  $g(\tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2)$  ne s'intersectent pas. Si les adhérences de  $\tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2$  et de  $g(\tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2)$  s'intersectent,  $\tilde{l}_1$  et  $g(\tilde{l}_1)$  ont alors les deux mêmes bouts. On en déduit que  $g^2$  fixe les deux bouts de  $\tilde{l}_1$ . Quitte à extraire, la suite  $g^2(\tilde{l}_1)$  converge vers une géodésique  $\tilde{l} \subset p^{-1}(A_1^+)$  dont la projection  $l \subset \partial M$  est compacte. Ceci contredit l'hypothèse que  $A_1^+$  est un minimal exceptionnel.

Dans le cas *I*, notons  $\tilde{c}^+$  le relevé de  $c^+$  qui intersecte  $\tilde{l}_1$  en  $\tilde{l}_1^+(x_i)$  et  $g$  l'élément de  $\rho(\pi_1(M))$  tel que  $g(\tilde{l}_1^+(x_j)) \subset \tilde{c}^+$  (cf. figure 2.2). D'après ce qui précède, on a  $O \subset g(O)$  ou  $g(O) \subset O$ . Par construction, l'un des deux arcs  $[l_1^+(x_i), l_1^+(x_j)]$ ,  $[l_2^+(y_i), l_2^+(y_j)]$  ne contient aucun des  $l_1^+(x_k)$ ,  $l_2^+(y_k)$  pour  $k \in \{i + 1, \dots, j - 1\}$ . Si l'autre arc contient  $l_1^+(x_k)$  ou  $l_2^+(y_k)$  alors  $\exists h \in \rho(\pi_1(M))$  tels que  $g(O) \cap h(O) \neq \emptyset$  que  $g(O) \not\subset h(O)$  et que  $h(O) \not\subset g(O)$ . On en déduit que l'adhérence de  $g(\tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2)$  intersecte l'adhérence de  $h(\tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2)$  ce qui contredit le paragraphe précédent.

Dans le cas *II*, l'un des deux arcs  $[l_1^+(x_i), l_2^+(y_j)]$ ,  $[l_2^+(y_i), l_1^+(x_j)]$  ne contient pas  $l_1^+(x_k)$  ni

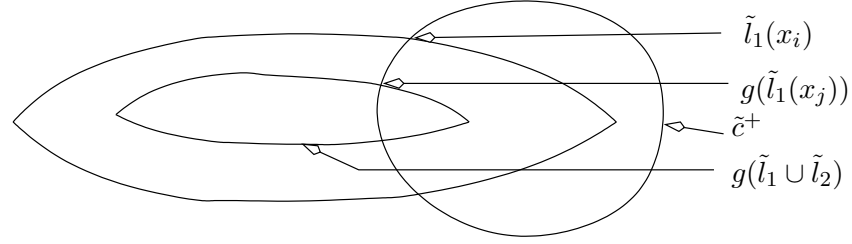


FIG. 2.2 – Figure pour le cas où  $g(O) \subset O$

$l_2^+(y_k)$  et le même raisonnement que dans le cas  $I$  permet d'en déduire que l'autre ne les contient pas non plus.  $\square$

Comme l'illustre la figure 2.3, ce couple  $i, j$  va nous permettre de construire l'anneau ou le ruban de Möbius essentiel  $E_\varepsilon$  cherché.

Comme  $l_1 \cup l_2$  n'intersecte pas  $\lambda$ , alors  $\exists \varepsilon(\lambda)$  tel que si  $l_k^+$  (pour  $k = 1$  ou  $2$ ) contient un

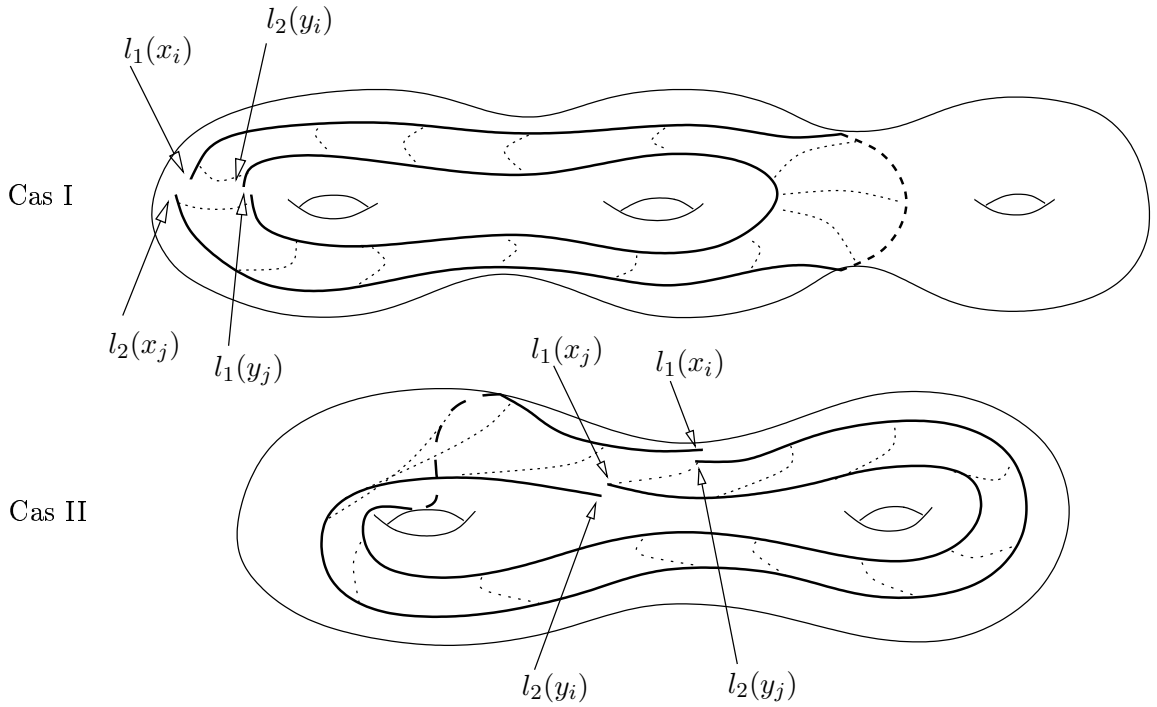


FIG. 2.3 – Un exemple pour chacun des deux cas possibles

point à distance inférieure à  $\varepsilon(\lambda)$  d'une feuille compacte  $d$  de  $\lambda$ , alors ou bien  $l_k = d$ , ou bien  $l_k^+$  spirale sur  $d$ .

Dans le cas I, comme  $A_1^+$  n'est pas une géodésique compacte, pour  $\varepsilon' < \varepsilon(\lambda)$  ni  $[l_1^+(x_i), l_1^+(x_j)]$  ni  $[l_2^+(y_i), l_2^+(y_j)]$  n'intersectent de feuille compacte de  $\lambda$ . On en déduit que pour  $\varepsilon'$  suffisamment petit,  $i([l_1^+(x_i), l_1^+(x_j)], \lambda) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et  $i([l_2^+(y_i), l_2^+(y_j)], \lambda) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . D'après un résultat de [ShW], les courbes simples  $l_1^+[x_i, x_j] \cup [l_1^+(x_i), l_1^+(x_j)]$  et  $l_2^+[y_i, y_j] \cup [l_2^+(y_i), l_2^+(y_j)]$  bordent un anneau proprement plongé  $E_\varepsilon$  (cf. figure 2.3) tel que  $i(\partial E_\varepsilon, \lambda) \leq \varepsilon$ . Comme les vecteurs  $\frac{d}{dt} l_1^+(x_i)$  et  $\frac{d}{dt} l_1^+(x_j)$  sont dirigés du même côté de  $c^+$ , pour  $\varepsilon'$  suffisamment petit les courbes simples  $\partial_1 E_\varepsilon = l_1^+[x_i, x_j] \cup [l_1^+(x_i), l_1^+(x_j)]$  et  $\partial_2 E_\varepsilon = l_2^+[y_i, y_j] \cup [l_2^+(y_i), l_2^+(y_j)]$  sont des quasi-géodésiques de  $\partial M$ . Soient  $\tilde{E}_\varepsilon \subset M$  un relevé de  $E_\varepsilon$  et  $\partial_1 \tilde{E}_\varepsilon$  et  $\partial_2 \tilde{E}_\varepsilon$  les deux composantes de son bord. Comme  $\tilde{\partial}_j \tilde{E}_\varepsilon$  est une quasi-géodésique de  $\partial \tilde{M}$ , elle est uniformément proche (en fonction de  $\varepsilon'$ ) d'une géodésique  $\tilde{c}_j$  de  $\partial \tilde{M}$ . L'hypothèse  $d(l_1^+(x_i), l_2^+(y_i)) > \zeta$  entraîne que  $\tilde{c}_1 \neq \tilde{c}_2$  et

on en déduit que  $E_\varepsilon$  est un anneau essentiel.

Dans le cas II, comme  $A_1^+$  n'est pas une géodésique compacte, pour  $\varepsilon' < \varepsilon(\lambda)$  suffisamment petit,  $i([l_1^+(x_i), l_2^+(y_j)], \lambda) \leq \frac{\varepsilon}{4}$  et  $i([l_2^+(y_i), l_1^+(x_j)], \lambda) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . La courbe  $c = l_1^+[x_i, x_j] \cup [l_1^+(x_j), l_2^+(y_i)] \cup l_2^+[y_i, y_j] \cup [l_2^+(y_j), l_1^+(x_i)]$  borde un ruban de Möbius  $E'_\varepsilon$  (éventuellement singulier) tel que  $i(\partial E'_\varepsilon, \lambda) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Pour les raisons évoquées dans le cas I, ce ruban de Möbius est essentiel. Comme  $M$  est orientable, il existe deux copies disjointes de  $c$  dont la réunion borde un anneau (éventuellement singulier). D'après [ShW], ces deux copies bordent un anneau essentiel non singulier  $E_\varepsilon$  tel que  $i(\lambda, \partial E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ .

On a montré dans les deux cas que pour tout  $\varepsilon$ , il existe un anneau essentiel  $E_\varepsilon$  tel que  $i(\partial E_\varepsilon, \lambda) \leq \varepsilon$  ce qui contredit la condition  $b_1$ ).

ii) Afin de montrer la contraposé de  $b) \Rightarrow b_1$ ), nous allons prouver un résultat un peu plus fort qui nous sera utile par la suite. Une limite géométrique de bords d'anneaux n'est pas toujours annulaire, toutefois on a :

**Lemme 2.4.3.** *Soient  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui satisfait la condition c) et intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques et  $(A_n)$  une suite de multi-courbes telle que  $A_n$  borde un anneau ou un ruban de Möbius essentiel et que  $(A_n)$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $A$  qui n'intersecte pas  $|\lambda|$  transversalement; alors  $A$  est annulaire (en particulier  $\lambda$  n'est pas anannulaire).*

*Démonstration.* Notons  $S(A)$  la surface embrassée par  $A$ ; pour  $n$  assez grand,  $A_n \subset S(A)$ .

Si  $S(A)$  est incompressible et ne contient pas de courbes paraboliques; alors les  $A_n$  sont des laminations annulaires. Soient  $\tilde{S}(A) \subset \partial \tilde{M}$  un relevé de  $S(A)$  et  $\tilde{F}$  un domaine fondamental pour l'action de  $\pi_1(S(A))$  sur  $\tilde{S}(A)$ . Soient  $\tilde{l}_{1,n}$  et  $\tilde{l}_{2,n}$  deux feuilles biasymptotes de  $p^{-1}(A_n)$  telles que  $\tilde{l}_{1,n}$  intersecte  $\tilde{F}$ ; quitte à extraire, on peut supposer que la suite  $(\tilde{l}_{1,n})$  converge vers un relevé  $\tilde{l}_1$  d'une feuille  $l_1$  de  $A$ . D'après l'affirmation 2.1.2, quitte à extraire, les feuilles  $\tilde{l}_{2,n}$  sont contenues dans un même relevé  $\tilde{S}(A)' \subset \partial \tilde{M}$ . Comme les bouts des  $\tilde{l}_{2,n}$  convergent vers les bouts de  $\tilde{l}_1 \subset \tilde{S}(A)$ , alors la suite  $(\tilde{l}_{2,n})$  converge vers le relevé  $\tilde{l}_2 \subset \tilde{S}(A)'$  d'une feuille  $l_2$  de  $A$  qui a les deux mêmes bouts que  $\tilde{l}_1$ . Si  $\tilde{S}(A) = \tilde{S}(A)'$  alors  $\tilde{l}_{1,n}$  et  $\tilde{l}_{2,n}$  sont contenues dans  $\tilde{S}(A)$ . Comme  $\tilde{l}_{1,n}$  et  $\tilde{l}_{2,n}$  sont biasymptotes, ceci contredit le fait que l'adhérence de  $\tilde{S}(A)$  dans  $\tilde{M}$  est un disque (affirmation 2.1.1) donc  $\tilde{S}(A) \neq \tilde{S}(A)'$  et  $\tilde{l}_2 \neq \tilde{l}_1$ . On en déduit que  $A$  est une lamination géodésique annulaire.

Si  $S(A)$  est compressible ou contient une courbe parabolique, d'après le lemme 2.2.2, il existe une multi-courbe  $C$  par rapport à laquelle  $A$  est en position prétendue et telle que  $C$  contient un système admissible de méridiens  $C_0$  ou une courbe parabolique  $C_0$  (la suite de la preuve étant la même dans les deux cas, on a donné le même nom au système admissible et à la courbe parabolique). Comme  $A$  est en position prétendue par rapport à  $C$ , pour  $n$  assez grand  $A_n$  est également en position prétendue par rapport à  $C$  (affirmation 1.5.1). D'après le fait 2.2.4,  $A_n$  n'est pas une courbe parabolique. Si la longueur des composantes de  $A_n - C$  n'est pas bornée; il existe une suite d'arcs  $(k_n) \subset A_n - C$  tels que  $l(k_n) \rightarrow \infty$ . Une valeur d'adhérence pour la topologie de Hausdorff de cette suite d'arcs contient une lamination géodésique qui n'intersecte pas  $C$ , ce qui contredit le fait que  $A$  est en position prétendue par rapport à  $C$ .

Il existe donc une constante  $K$  qui majore la longueur des composantes de  $A_n - C$ . Soit  $c$  une composante de  $C_0$ ; d'après les hypothèses faites sur  $\lambda$ ,  $|\lambda|$  intersecte transversalement  $c$ . Comme  $A$  n'intersecte pas  $|\lambda|$  transversalement,  $|\lambda| \cap S(A) \subset A$ . Une sous-lamination minimale de  $A$  intersecte donc  $c$  transversalement. Soient  $l$  une feuille de cette sous-lamination minimale (en particulier  $l$  est une feuille récurrente de  $A$  qui intersecte  $c$  transversalement) et  $\tilde{l}$  un relevé de  $l$  à  $\partial \tilde{M}$ , notons  $(\tilde{c}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  les composantes de  $p^{-1}(C)$  que  $\tilde{l}$  intersecte successivement. Notons

$\tilde{l}[-p, p]$  le segment de  $\tilde{l}$  qui joint  $\tilde{c}_{-p}$  et  $\tilde{c}_p$ ; la longueur de  $\tilde{l}[-p, p]$  est majorée par  $2Kp$ . Comme  $A_n$  converge géométriquement vers  $A$ , pour  $n$  assez grand une feuille  $\tilde{a}_n$  de  $p^{-1}(A_n)$  intersecte  $\tilde{c}_{-p}$  et  $\tilde{c}_p$  et  $\tilde{a}_n[-p, p]$  converge pour la topologie de Hausdorff vers  $\tilde{l}[-p, p]$ . Soient  $E_n$  un anneau ou un ruban de Möbius essentiel bordé par  $A_n$  et  $\tilde{E}_n$  le relevé de  $E_n$  dont le bord contient  $\tilde{a}_n$ ; montrons que  $\tilde{a}'_n = \partial\tilde{E}_n - \tilde{a}_n$  intersecte aussi  $\tilde{c}_t$  pour tout  $t \in \{-p, \dots, p\}$ .

D'après le fait 1.5.4,  $\partial a_n$  est en position prétendue par rapport à  $C$ . Si  $p(\tilde{c}_t) \subset C_0$ , on déduit de la preuve du fait 2.2.4 que  $\tilde{c}_t$  sépare les deux bouts de  $\tilde{a}_n$  et donc que  $\tilde{a}'_n$  intersecte  $\tilde{c}_t$ . Si  $p(\tilde{c}_t)$  n'est pas un méridien ni une courbe parabolique, comme  $l$  est récurrente et intersecte  $c$  transversalement, il existe  $\tilde{c}_{t_1}$  et  $\tilde{c}_{t_2}$  tels que  $t_1 < t < t_2$  et que pour  $s \subset [t_1, t_2]$ ,  $p(\tilde{c}_s) \subset C_0 \Leftrightarrow s \subset \{t_1, t_2\}$ . Pour  $n$  assez grand,  $\tilde{a}_n$  intersecte  $\tilde{c}_{t_1}$  et  $\tilde{c}_{t_2}$ , donc  $\tilde{a}'_n$  les intersecte aussi et les composantes bornées  $\tilde{k}$  et  $\tilde{k}'$  de  $\tilde{a}_n - (\tilde{c}_{t_1} \cup \tilde{c}_{t_2})$  et  $\tilde{a}'_n - (\tilde{c}_{t_1} \cup \tilde{c}_{t_2})$  sont homotopes dans  $\tilde{M}$  relativement à  $\tilde{c}_{t_1} \cup \tilde{c}_{t_2}$ .

Si  $S$  est compressible, on peut choisir pour  $C_0$  un système admissible de méridiens. Notons  $S'$  la surface obtenue en découpant  $S$  le long de  $C_0$  et en recollant le long de chaque composante de bord ainsi formée un disque de  $M$  qu'elle borde. Comme  $C_0$  est un système admissible, la surface  $S'$  ainsi construite est soit une sphère, soit une surface incompressible. D'après la remarque qui suit le lemme 2.2.1, si  $S'$  est une sphère, on peut prendre  $C = C_0$  et l'étude précédente du cas  $p(\tilde{c}_p) \subset C_0$  suffit pour conclure. Si  $S'$  est une surface incompressible,  $\tilde{k}$  et  $\tilde{k}'$  sont homotopes dans  $p^{-1}(S')$  relativement à  $\tilde{c}_{t_1} \cup \tilde{c}_{t_2}$ . On en déduit que si  $\tilde{c}_p$  intersecte  $\tilde{k}$  mais pas  $\tilde{k}'$  alors  $k$  contient un arc de compression vers  $C$ . Comme  $\tilde{c}_p$  intersecte  $\tilde{k}$  et comme  $A$  est en position prétendue par rapport à  $C$ , il en découle que  $\tilde{k}'$  intersecte  $\tilde{c}_p$ .

Si  $S$  est incompressible,  $\tilde{k}$  et  $\tilde{k}'$  sont homotopes dans  $p^{-1}(S')$  relativement à  $\tilde{c}_{t_1} \cup \tilde{c}_{t_2}$  et on aboutit à la même conclusion.

On vient de prouver que  $\tilde{a}'_n$  intersecte aussi  $\tilde{c}_t$  pour tout  $t \in \{-p, \dots, p\}$ . En inversant les rôles de  $\tilde{a}_n$  et  $\tilde{a}'_n$  on déduit du même raisonnement que les seules composantes de  $p^{-1}(C)$  que  $\tilde{a}'_n[-p, p]$  intersecte sont les  $\tilde{c}_t$  avec  $t \in \{-p, \dots, p\}$ . Il s'ensuit que la longueur de  $\tilde{a}'_n[-t, t]$  est plus petite que  $2tK$ . Quitte à extraire,  $\tilde{a}'_n[-t, t]$  converge pour la topologie de Hausdorff vers un arc  $\tilde{\kappa}_p \subset p^{-1}(A)$ . Faisons cette construction pour chaque  $p \in \mathbb{N}$  de manière que  $\tilde{\kappa}_p \subset \tilde{\kappa}_{p+1}$ . Les  $\tilde{\kappa}_p$  sont alors contenu dans une feuille  $\tilde{l}'$  de  $p^{-1}(A)$  et  $\tilde{l}'$  intersecte tous les  $\tilde{c}_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Comme  $l$  est une géodésique récurrente,  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $\exists p_1, p_2 \geq p$  tels que  $\tilde{c}_{-p_1}$  et  $\tilde{c}_{p_2}$  sont contenus dans  $p^{-1}(C_0)$ . On déduit de la preuve de l'affirmation 2.2.4 que  $\tilde{l}$  et  $\tilde{l}'$  ont les deux mêmes bouts.

Si  $\tilde{l} = \tilde{l}'$ , alors pour  $n$  assez grand  $\tilde{a}_n$  et  $\tilde{a}'_n$  intersectent un  $\varepsilon$ -voisinage de  $\tilde{l}$ . Il existe donc un petit segment  $\tilde{I}_n \subset \partial\tilde{M}$  qui joint les deux composantes du bord de  $\tilde{E}_n$  avec  $\tilde{I}_n \cap \tilde{E}_n = \partial\tilde{I}_n$ . La projection de  $\tilde{I}_n$  sur  $\partial M$  est un arc de compression vers  $A_n = \partial E_n$  et par chirurgie de  $E_n$  le long de cet arc, on obtient un disque essentiel  $D_n$  disjoint de  $E_n$  et dont le bord est homotope à une courbe contenue dans un  $\varepsilon$ -voisinage de  $E_n$ . Quitte à extraire,  $\partial D_n$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $L \in ad_h(\mathcal{M})$  et d'après le critère de Casson,  $L$  possède une feuille homoclinique. Comme  $A_n$  converge géométriquement vers  $A$  et que  $\partial D_n$  est disjoint de  $A_n = \partial E_n$ , cette lamination  $L$  n'intersecte pas  $A$  transversalement. Comme  $\partial D_n$  peut être homotopé dans un  $\varepsilon$ -voisinage de  $A_n$ , alors pour  $i$  assez grand,  $\partial D_n$  est disjoint de  $\lambda - A$ . On en déduit que  $L$  n'intersecte pas  $|\lambda|$  transversalement et en particulier qu'il existe une feuille homoclinique disjointe de  $|\lambda|$  ce qui contredit le lemme 2.2.3.

Si  $\tilde{l} \cap \tilde{l}' = \emptyset$ , alors  $\tilde{l}$  et  $\tilde{l}'$  sont biasymptotes et  $A$  est annulaire.  $\square$

Achevons maintenant la preuve du ii). Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui satisfait la condition c) et intersecte transversalement toutes les courbes paraboliques. Supposons que  $\lambda$  ne vérifie pas  $b_1$ ), il existe alors une suite  $(E_n)$  d'anneaux ou de rubans de Möbius essentiels telle que  $i(\partial E_n, \lambda) \rightarrow 0$ . Quitte à extraire,  $(\partial E_n)$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $A$  qui n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement. D'après l'affirmation précédente,  $A$  est annulaire, ce qui contredit b).  $\square$

## 2.5 Laminations annulaires et compactification de $\partial\tilde{M}$

Pour finir la preuve de la proposition 2.2, nous allons montrer que l'on peut remplacer une des conditions  $b)$  ou  $b_1)$  par la condition  $b_2)$ .

**Lemme 2.5.1.** *Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée vérifiant les conditions  $a)$  et  $c)$ ; alors les conditions  $b)$ ,  $b_1)$  sont équivalentes à la condition suivante :*

$b_2)$  *l'intersection des adhérences dans  $\tilde{B}$  de deux composantes connexes du complémentaire de  $p^{-1}(\lambda)$  dans  $\partial\tilde{M}$  est soit vide, soit l'adhérence d'une feuille  $\tilde{l} \subset p^{-1}(\lambda)$  dont la projection sur  $\partial M$  est une feuille compacte.*

*Démonstration.* i) Montrons par l'absurde que  $b_2) \Rightarrow b)$ . Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui satisfait les conditions  $a)$ ,  $b_2)$  et  $c)$ . Nous allons supposer qu'il existe une lamination géodésique annulaire  $A$  qui n'intersecte pas  $\lambda$  et aboutir à une contradiction. Soient  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$  une paire de géodésiques biasymptotes contenues dans un relevé de  $A$ ;  $\tilde{l}_1$  et  $\tilde{l}_2$  sont contenues dans les adhérences  $\tilde{F}_1$  et  $\tilde{F}_2$  de deux composantes de  $\partial\tilde{M} - p^{-1}(\lambda)$ .

Si  $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$  alors  $\tilde{F}_1$  contient une paire de géodésiques biasymptotes, à savoir  $(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2)$ . Si  $\tilde{F}_1 \neq \tilde{F}_2$ , d'après la condition  $b_2)$ ,  $\tilde{F}_1 \cap \tilde{F}_2$  est une géodésique  $\tilde{c}$  qui joint les bouts de  $\tilde{l}_1$ ; on a alors  $\tilde{l}_1 \neq \tilde{c}$  ou  $\tilde{l}_2 \neq \tilde{c}$  donc  $\tilde{F}_1$  ou  $\tilde{F}_2$  contient une paire de géodésiques biasymptotes, à savoir  $(\tilde{l}_1, \tilde{c})$  ou  $(\tilde{l}_2, \tilde{c})$ . Dans les deux cas, on peut donc supposer que  $\tilde{F}_1$  contient deux géodésiques biasymptotes, notons les  $\tilde{l}_3$  et  $\tilde{l}_4$ . Si les demi-géodésiques  $\tilde{l}_3^+$  et  $\tilde{l}_4^+$  ainsi que  $\tilde{l}_3^-$  et  $\tilde{l}_4^-$  sont asymptotes dans  $\tilde{F}_1$ , on peut, comme dans la preuve du i) de la proposition 2.2 (cas où  $\lim_{\psi(n) \rightarrow +\infty} d(l(x_{\psi(n)}), l(y_{\psi(n)})) = 0$  et  $\lim_{\psi'(n) \rightarrow +\infty} d(l(x_{-\psi'(n)}), l(x_{-\psi'(n)})) = 0$ ), construire un méridien  $\mu \subset \tilde{F}_1$  ce qui contredit  $c)$ . Sinon, considérons par exemple le cas où  $\tilde{l}_3^+$  et  $\tilde{l}_4^+$  ne sont pas asymptotes dans  $\tilde{F}_1$ . Soit  $\hat{F}_1$  un relevé de  $\tilde{F}_1$  au revêtement universel de la composante de  $\partial M$  qui contient  $F_1$ ; comme  $\tilde{l}_3^+$  et  $\tilde{l}_4^+$  ne sont pas asymptotes dans  $\tilde{F}_1$ ,  $\hat{F}_1$  contient des relevés  $\hat{l}_3^+$  et  $\hat{l}_4^+$  de  $\tilde{l}_3^+$  et  $\tilde{l}_4^+$  qui ont des bouts distincts. La projection sur  $\partial M$  d'une géodésique  $\hat{l} \subset \hat{F}_1$  qui joint le bout de  $\hat{l}_3^+$  à celui de  $\hat{l}_4^+$  est une feuille homoclinique disjointe de  $|\lambda|$ . Ceci contredit le lemme 2.2.3.

ii) Montrons enfin  $b) \Rightarrow b_2)$ . On pourrait montrer que la condition  $b_2)$  est naturellement satisfaite par la lamination mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie. Comme la propriété  $b_2)$  ne sera pas utilisée dans la preuve du théorème A, cette implication  $b) \Rightarrow b_2)$  peut alors être déduite du théorème A. Nous allons néanmoins en donner brièvement une preuve directe. Soient  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée qui vérifie les conditions  $a)$ ,  $b)$  et  $c)$  (et donc  $b_1)$  d'après la proposition 2.2),  $\tilde{F}_1$  et  $\tilde{F}_2$  deux composantes de  $\partial\tilde{M} - p^{-1}(\lambda)$  dont les adhérences s'intersectent et  $F_j$  la projection de  $\tilde{F}_j$  sur  $\partial M$ . Les surfaces  $\tilde{F}_1$  et  $\tilde{F}_2$  contiennent deux demi-géodésiques  $\tilde{l}_1^+$  et  $\tilde{l}_2^+$  dont les adhérences s'intersectent. Si  $l_1^+$  et  $l_2^+$  ne sont pas proprement homotopes sur  $\partial M$ , en appliquant la méthode utilisée dans la preuve du ii) du lemme 2.4.1, on construit dans un voisinage de  $l_1^+ \cup l_2^+$  une suite d'anneaux ou de rubans de Möbius essentiels  $E_n$  avec  $i(\lambda, \partial E_n) \rightarrow 0$ , mais on ne peut ici garantir que  $\partial E_n$  est plongé. Le théorème de l'anneau ([Ja]) nous permet néanmoins d'en déduire une suites d'anneaux essentiels  $E'_n$  telle que  $i(\lambda, \partial E'_n) \rightarrow 0$ , ce qui contredit  $b_1)$ . Les demi-feuilles  $\tilde{l}_1^+$  et  $\tilde{l}_2^+$  se relèvent donc au revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de la composante de  $\partial M$  qui les contient en deux demi-géodésiques asymptotes. Deux telles courbes ne pouvant être séparées que par un relevé d'une feuille isolée de  $\lambda$ , on en déduit que  $\tilde{F}_1 \cap \tilde{F}_2$  contient une feuille  $\tilde{c}$  de ce type. La projection  $c = p(\tilde{c})$  de cette feuille est une feuille compacte et comme le support de  $\lambda$  est une lamination récurrente, ceci entraîne que ni  $\tilde{F}_1$  ni  $\tilde{F}_2$  n'est un triangle. Si  $\tilde{F}_1 \cap \tilde{F}_2$  contient un autre point, alors  $\tilde{F}_1 \cap \tilde{F}_2$  contient une paire de feuilles biasymptotes, ce qui contredit la condition  $b)$ . Les composantes  $\tilde{F}_1$  et  $\tilde{F}_2$  de  $\partial\tilde{M} - p^{-1}(\lambda)$  vérifient donc la condition  $b_2)$ .  $\square$

Ceci conclut la preuve de la proposition 2.2  $\square$



## 2.6 Intersection avec les feuilles homocliniques

Nous allons enfin donner une condition qui peut remplacer la condition c). Si  $\lambda$  est une lamination géodésique mesurée et  $l$  une géodésique simple non compacte, on définit la mesure  $\int_l d\lambda$  comme la limite des mesures  $\int_{k_n} d\lambda$  où  $k_n$  est une suite de segments emboîtés qui tendent vers  $l$ . Cette mesure peut être infinie et elle est indépendante de la suite  $k_n$  choisie.

**Lemme 2.6.1.** *Si  $\lambda$  est une lamination géodésique mesurée qui satisfait aux conditions b) et c), alors elle a la propriété suivante :*

- c<sub>1</sub>) *toute feuille homoclinique  $l$  qui est contenue dans une limite géométrique de courbes simples vérifie  $\int_l d\lambda > 2\pi$ .*

*Démonstration.* Soient  $l$  une feuille homoclinique telle que  $\int_l d\lambda \leq 2\pi$  et  $\tilde{l}$  un relevé de  $l$  dans  $\partial\tilde{M}$ ; d'après la condition c),  $l$  n'est pas une feuille compacte. Notons  $l^+$  et  $l^-$  deux demi-feuilles disjointes de  $l$  et  $L^+$  et  $L^-$  les laminations minimales contenues dans  $\tilde{l}^+$  et  $\tilde{l}^-$ .

Montrons tout d'abord que  $L^+$  et  $L^-$  n'intersectent pas  $\lambda$ . Sinon il existe un segment  $I \subset L^+$  tel que  $\int_I d\lambda > 0$ . Comme  $L^+ \subset \tilde{l}^+$ ,  $l^+$  contient une infinité de segments proches de  $I$  et  $\int_l d\lambda = +\infty$ , ce qui contredit l'hypothèse  $\int_l d\lambda \leq 2\pi$ .

D'après ce qui précède, quitte à les raccourcir, on peut supposer  $l^+$  et  $l^-$  disjointes de  $\lambda$ . Comme  $\lambda$  satisfait la condition b), on déduit de la preuve du i) de la proposition 2.2 que  $l^+$  et  $l^-$  sont homotopes sur  $\partial M$  (sinon les arguments de la preuve du i) de la proposition 2.2 permettent de produire pour tout  $\varepsilon > 0$  un anneau ou un ruban de Möbius essentiel  $E_\varepsilon$  tel que  $i(\lambda, \partial E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ ). Il existe donc une suite de segments  $I_n$  dont la longueur tend vers 0 et qui joignent  $l^+$  à  $l^-$ . Lorsque  $l$  est dans une limite géométrique de courbes simples,  $I_n$  n'intersecte pas de relevé de feuille compacte de  $\lambda$  et  $\int_{I_n} d\lambda \rightarrow 0$ . Ceci nous permet de conclure que pour  $n$  assez grand, la projection de la réunion de  $I_n$  et de l'arc de  $l$  qui joint ses deux extrémités est homotope à un méridien  $c$  tel que  $i(\lambda, c) \leq 2\pi$ . Ceci contredit la condition c). □

# Interlude : Le Petit Chaperon Rouge de la Forêt Noire

Il était une fois, loin dans la forêt, mais près de la France, une chaumière où vivait paisiblement une gentille famille. L'unique enfant se promenait souvent coiffé d'un capuchon rouge, ce qui lui avait valu le surnom de Petit Chaperon Rouge. Rejoignons-le alors qu'il sort de chez lui, affublé de son célèbre couvre-chef. Il porte au côté un panier d'osier rempli de savoureux bretzels qu'il s'en va porter à sa mère-grand. Les loups ayant été depuis longtemps exterminés en Allemagne et Marc Dutrou dormant en prison, il arrive sans encombres. Il tire la bobinette et la chevillette cherre (manifestement, cette bobinette ne connaît pas bien sa grammaire). Sa mère-grand, après qu'il lui ait offert les victuailles, soupèse les bretzels en s'exclamant : "ah, il y a même des bretzels creux", puis en goûte un. "Mais, il n'y a pas de lamination géodésique mesurée de plissage" se plaint-elle, ce à quoi le Petit Chaperon répond : "oups, j'ai dû les égarer en chemins, je vais les chercher". Cependant, depuis que W. Thurston a planté ses graines fertiles, de nombreuses laminations géodésiques mesurées s'ébattent librement dans la forêt et le Petit Chaperon Rouge aurait bien besoin d'un théorème pour faire le tri. Heureusement, en sortant de chez sa mère-grand, il rencontre la fée Yetage, qui, pour soulager sa détresse, lui fait don d'un théorème magique.

Ainsi équipé, le Petit Chaperon Rouge se met en quête des laminations mesurées de plissage dont sa mère-grand est si friande. Malheureusement, les laminations apeurées ont couru se réfugier dans les ronces. Le Petit Chaperon tente de les en déloger et une lutte effroyable s'ensuit, dans laquelle le terrible végétal a tôt fait de réduire en charpie le froc du Petit Chaperon. Celui-ci s'en trouve fort embarrassé, d'une part parce que son postérieur se rafraîchit à vive allure, d'autre part parce qu'un curé, voisin mais néanmoins doté d'un œil fort lubrique, se rapproche innocemment. Fort heureusement, le Petit Chaperon emporte toujours du fil et une aiguille et a tôt fait de transformer son chaperon en kilt. Le curé, que les robes n'intéressent guère, s'apprête à s'éloigner mais, trouvant là une occasion de remplir sa pieuse mission, sort une bouteille de blanc et rebaptise Petit Kilt Rouge le héros de cette histoire.

Le Petit Kilt Rouge, un peu fatigué, s'étend dans l'herbe et s'endort paisiblement. Afin d'accorder aux personnages de ce conte un minimum d'intimité, nous ne décrivons pas le Petit Kilt endormi. Une fois réveillé, il se dirige vers son panier, l'ouvre et découvre avec stupeur que les bretzels creux destinés à sa mère-grand ont été fort agités pendant la sieste : ils sont maintenant imbriqués les uns dans les autres dans des positions fort imaginatives et forment toutes sortes de variétés de pâtisseries. Elles ont l'air très appétissantes, mais le Petit Kilt se demande si son théorème magique fonctionne aussi sur elles.

## Chapitre 3

# Continuité de la mesure de plissage

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la continuité de  $b_{\mathcal{R}}$ . Nous allons d'abord établir des résultats généraux sur les surfaces plissées. Nous montrerons ensuite que  $\mathcal{P}(M)$  est l'image de  $b_{\mathcal{G}\mathcal{F}}$  et nous verrons comment en déduire que  $\mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$  est l'image de  $b_{\mathcal{R}}$ . Enfin nous montrerons la continuité de  $b_{\mathcal{R}}$ .

### 3.1 Surfaces plissées convexes

Dans cette section, nous allons présenter quelques définitions et divers propriétés des surfaces plissées.

Une surface plissée dans une variété  $M$  de dimension 3 dont l'intérieur est muni d'une métrique hyperbolique complète est une application  $f : S \rightarrow M$  d'une surface  $S$  dans  $M$  qui possède les propriétés suivantes :

- la métrique obtenue en tirant en arrière la métrique par chemin induite par l'inclusion  $f(S) \subset M$  est une métrique hyperbolique  $s$  sur  $S$ ;
- tout point de  $S$  est contenu dans l'intérieur d'un arc  $s$ -géodésique dont l'image par  $f$  est un arc géodésique de  $M$ ;
- si  $c \subset S$  est une courbe simple contenue dans une pointe de  $S$  et que  $c$  ne borde pas de disque dans  $S$  alors  $f(c)$  n'est pas librement homotope à un point dans  $M$ .

Une application  $\hat{f} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  est une application plissée si tout point de  $\mathbb{H}^2$  est contenu dans l'intérieur d'un arc géodésique dont l'image par  $\hat{f}$  est un arc géodésique de  $\mathbb{H}^3$ .

Le lieu de plissage d'une application plissée  $\hat{f}$  est l'ensemble des points de  $\mathbb{H}^2$  par lesquels passe un seul arc géodésique dont l'image est un arc géodésique de  $\mathbb{H}^3$ . Le lieu de plissage d'une application plissée est une lamination géodésique (cf. [Th1]).

Une surface plissée abstraite est un triplet  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  où  $\hat{f} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  est une application plissée,  $\Gamma$  est un réseau de  $Isom(\mathbb{H}^2)$  et  $\rho : \Gamma \rightarrow Isom(\mathbb{H}^3)$  est une représentation discrète (mais pas nécessairement fidèle) telle que pour tout  $g \in \Gamma$ ,  $\hat{f} \circ g = \rho(g) \circ \hat{f}$  et que si  $a \in \Gamma$  est une isométrie parabolique, alors  $\rho(a)$  est aussi une isométrie parabolique.

Les surfaces plissées abstraites sont reliées aux surfaces plissées de la manière suivante :

Si  $\rho(\Gamma)$  n'a pas de torsion, la surface plissée abstraite  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  fournit, en passant aux quotients, une surface plissée  $g : S \rightarrow M$  où  $S \approx \mathbb{H}^2/\Gamma$ ,  $M \approx \mathbb{H}^3/\rho(\Gamma)$  et où  $g$  est l'application quotient de  $\hat{f}$ .

Si  $f : S \rightarrow M$  est une surface plissée, considérons des revêtements isométriques  $\mathbb{H}^2 \rightarrow S$  et  $\mathbb{H}^3 \rightarrow M$ . Ces revêtements fournissent des représentations  $r : \pi_1(S) \rightarrow Isom(\mathbb{H}^2)$  et

$R : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  et en relevant  $f$  en une application  $\hat{f} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  on obtient une surface plissée abstraite  $(\hat{f}, r(\pi_1(S)), R \circ f_*)$ .

Dans la suite nous omettrons l'adjectif abstraite et nous supposons que les surfaces plissées (abstraites) n'ont pas de torsion.

Nous dirons qu'une suite de surfaces plissées  $(\hat{f}_n, \Gamma_n, \rho_n)$  converge vers une surface plissée  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$  lorsque

- $\Gamma_n$  converge géométriquement vers  $\Gamma_\infty$  ;
- pour toute suite  $a_n \in \Gamma_n$  qui converge vers  $a_\infty$ ,  $\rho_n(a_n)$  converge vers  $\rho_\infty(a_\infty)$  ;
- $\hat{f}_n$  converge vers  $\hat{f}_\infty$  sur tout compact.

Soient  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  une surface plissée,  $\hat{L} \subset \mathbb{H}^2$  son lieu de plissage et  $P$  une composante connexe de  $\mathbb{H}^2 - \hat{L}$  ;  $\hat{f}(P)$  est contenue dans un plan totalement géodésique  $\Pi_P$ . Par l'intermédiaire de  $\hat{f}$ , une orientation de  $\mathbb{H}^2$  nous fournit une orientation de  $\Pi_P$  et nous noterons  $H_P^+$  (resp.  $H_P^-$ ) le demi-espace fermé bordé par  $\Pi_P$  tel que la réunion d'une base directe de  $\Pi_P$  et du vecteur normal à  $\Pi_P$  qui pointe vers l'intérieur de  $H_P^+$  (resp.  $H_P^-$ ) est une base directe de  $\mathbb{H}^3$  (resp. indirecte).

Une surface plissée  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  de lieu de plissage  $\hat{L}$  est une surface plissée convexe si

- 1)  $\exists \epsilon \in \{+, -\}$  tel que pour toute composante  $P$  de  $\mathbb{H}^2 - \hat{L}$ ,  $\hat{f}(\mathbb{H}^2)$  est contenue dans  $H_P^\epsilon$  ;
- 2) l'intérieur de  $C_{\hat{f}} = \bigcap \{H_{P_i}^\epsilon / P_i\}$  est une composante connexe de  $\mathbb{H}^2 - \hat{L}$  n'est pas vide.

Si une surface plissée  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  satisfait 1) et si  $\text{int}(C_{\hat{f}}) = \emptyset$ , on dira que  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  est une surface plissée aplatie.

D'après [EpM], lorsque  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  est une surface plissée convexe, l'application  $\hat{f}$  est un revêtement.

Dans la suite, pour toute surface plissée  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  que nous considérerons, nous choisirons l'orientation de  $\mathbb{H}^2$  de façon que pour une composante  $P$  de  $\mathbb{H}^2 - \hat{L}$ ,  $\hat{f}(\mathbb{H}^2)$  est contenue dans  $H_P^+$ .

**Lemme 3.1.1.** *L'ensemble des surface plissées convexes et aplaties est un sous-ensemble fermé de l'ensemble des surfaces plissées.*

*Démonstration.* Soit  $(\hat{f}_n, \Gamma_n, \rho_n)$  une suite de surfaces plissées convexes ou aplaties qui converge vers  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$ . Nous allons suivre [BoO, Lemmes 20 et 21] pour montrer que  $\hat{f}_\infty$  est une surface plissée convexe ou aplatie. Notons  $\hat{L}_n$  le lieu de plissage de  $(\hat{f}_n, \Gamma_n, \rho_n)$  et considérons une lamination géodésique  $\hat{L}_\infty$  qui est la limite d'une sous-suite de  $(\hat{L}_n)$  qui converge géométriquement. D'après [CEG, paragraphe 5.2] le lieu de plissage de  $\hat{f}_\infty$  est contenu dans  $\hat{L}_\infty$ . Soit  $\hat{x} \in \mathbb{H}^2 - \hat{L}_\infty$  ; pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand, notons  $\hat{P}_n$  la composante de  $\mathbb{H}^2 - \hat{L}_n$  qui contient  $\hat{x}$ . La suite  $\hat{f}_n(\hat{P}_n)$  converge vers  $\hat{f}_\infty(\hat{P}_\infty)$ , donc, quitte à extraire une sous-suite,  $H_{\hat{P}_n}^+$  converge vers un demi-espace  $H_{\hat{P}_\infty}^+$  dont le bord contient  $\hat{f}_\infty(\hat{P}_\infty)$ . Comme  $\hat{f}_n(\mathbb{H}^2)$  converge vers  $\hat{f}_\infty(\mathbb{H}^2)$ , on a  $\hat{f}_\infty(\mathbb{H}^2) \subset H_{\hat{P}_\infty}^+$ . Le même raisonnement s'appliquant à tout point  $\hat{x} \in \mathbb{H}^2 - \hat{L}_\infty$ , on en déduit que  $\hat{f}_\infty$  est une surface plissée convexe ou aplatie.  $\square$

Nous allons maintenant donner la définition de la lamination géodésique mesurée de plissage d'une surface plissée convexe  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$ .

Soient  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  une surface plissée convexe ou aplatie de lieu de plissage  $L$  et  $\hat{x} \in \mathbb{H}^2$  ; un

plan de support en  $\hat{f}(\hat{x})$  pour  $\hat{f}(\mathbb{H}^2)$  est un plan totalement géodésique  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x})}$  qui contient  $\hat{f}(\hat{x})$  et borde un demi-espace  $H_{\hat{f}(\hat{x})}^+$  qui contient  $\hat{f}(\mathbb{H}^2)$ . Soit  $\hat{k} \subset \mathbb{H}^2$  un arc géodésique fermé tel que  $\hat{f}(\hat{k})$  intersecte au plus une fois chaque feuille de  $\hat{f}(\hat{L})$ ; une approximation polygonale de  $\hat{f}(\hat{k})$  est une famille finie  $\mathfrak{P} = \{(\hat{x}_i, \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)})/i = 0, \dots, p\}$  satisfaisant :

- les  $\hat{x}_i$  sont des points ordonnés de  $\hat{k}$ ;
- $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}$  est un plan de support en  $\hat{f}(\hat{x}_i)$ ;
- pour tout  $i = 1, \dots, p-1$ ,  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)} \cap \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})} \neq \emptyset$ ;
- si  $\hat{x}_{i-1} = \hat{x}_i = \hat{x}_{i+1}$ , alors  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}$  intersecte l'intérieur de  $H_{\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}}^+ - H_{\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i-1})}}^+$  (les plans  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}$  sont "ordonnés") ;
- la projection de  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)} \cap \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}$  sur  $\hat{f}(\mathbb{H}^2)$  intersecte le sous-arc de  $\hat{k}$  qui joint  $\hat{x}_i$  à  $\hat{x}_{i+1}$ .

L'entier  $p$  est la longueur de l'approximation polygonale. Notons  $\theta(\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}, \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})})$  l'angle interne du secteur angulaire  $(H_{\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}}^+ - \text{int}(H_{\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}}^+))$  et remarquons que cet angle est défini aussi pour une surface plissée non convexe.

Soient  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  une surface plissée convexe de lieu de plissage  $\hat{L}$  et  $\hat{k} \subset \mathbb{H}^2$  un arc géodésique fermé tel que  $\hat{f}(\hat{k})$  intersecte au plus une fois chaque feuille de  $\hat{f}(\hat{L})$ ; d'après [EpM] il existe une approximation polygonale de  $\hat{f}(\hat{k})$ .

**Définition.** La mesure de plissage  $\int_{\hat{k}} d\hat{\lambda}$  de  $\hat{k}$  est définie par :

$$\int_{\hat{k}} d\hat{\lambda} = \inf_{\mathfrak{P}} \sum_{i=1}^p \theta(\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}, \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})})$$

où  $\mathfrak{P}$  désigne l'ensemble des approximations polygonales de  $\hat{f}(\hat{k})$

D'après [EpM, section 1.11], on définit ainsi une mesure  $\hat{\lambda}$  transverse au lieu de plissage. Pour obtenir la mesure de plissage d'un segment transverse au lieu de plissage, on le découpe en segments dont les images par  $\hat{f}$  intersectent au plus une fois chaque feuille de l'image du lieu de plissage et on ajoute les mesures de plissage de ces segments.

Afin de contrôler l'erreur commise en approchant un arc de  $\hat{f}(\mathbb{H}^2)$  par des approximations polygonales, nous allons utiliser la définition suivante : une approximation polygonale  $\mathfrak{P} = \{(\hat{x}^i, \Pi^i)\}$  d'un arc  $\hat{f}(\hat{k})$  est une  $(\delta, \varepsilon)$ -approximation si

- $\max_{1 \leq i \leq p-1} \theta(\Pi_i, \Pi_{i+1}) < \delta$  et
- $\max_{1 \leq i \leq p-1} d_{\mathbb{H}^2}(\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}) < \varepsilon$ .

L'existence d'une  $(\delta, \varepsilon)$ -approximation pour tout couple  $(\delta, \varepsilon)$ , et tout arc  $\hat{k}$  est prouvée dans [EpM]. Afin d'étudier des suites convergentes, nous aurons besoin de  $(\delta, \varepsilon)$ -approximations dont la longueur est bornée.

**Lemme 3.1.2.** Soient  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  une surface plissée convexe et  $\hat{k} \subset \mathbb{H}^2$  un arc transverse au lieu de plissage  $|\hat{\lambda}|$  de  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  tel que  $\hat{f}(\hat{k})$  intersecte au plus une fois chaque feuille de  $\hat{f}(|\hat{\lambda}|)$ ; alors il existe une  $(\delta, \varepsilon)$ -approximation de  $\hat{f}(\hat{k})$  dont la longueur est majorée par  $\frac{4}{\varepsilon}(\frac{\pi}{\delta} + 1)l(k) + 4(\frac{\pi}{\delta} + 1) = B(\varepsilon, \delta, l(\hat{k}))$ .

*Démonstration.* Nous allons montrer ce lemme pour  $\varepsilon < \frac{\log 3}{2}$ . Ceci est suffisant puisqu'une  $(\delta, \varepsilon)$ -approximation est une  $(\delta, \varepsilon')$ -approximation pour tout  $\varepsilon' \geq \varepsilon$ .

Soient  $\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{p+1}$  des points de  $\hat{k} - |\hat{\lambda}|$  tels que  $\{\hat{x}_1, \hat{x}_{p+1}\} \subset \partial \hat{k}$ , que  $p \leq \frac{l(\hat{k})}{\varepsilon}$  et que  $d(\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}) \leq \varepsilon$  pour tout  $i \in \{0, \dots, p\}$ ; soit  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}$  un plan de support en  $\hat{f}(\hat{x}_i)$ . La première étape de la preuve consiste à ajouter des plans de support à la famille  $(\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)})$  jusqu'à obtenir une approximation polygonale. Nous allons étudier les trois configurations possibles pour  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}$  et  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}$ . Notons  $\hat{k}_i$  le sous-arc de  $\hat{k}$  qui joint  $\hat{x}_i$  à  $\hat{x}_{i+1}$ .

- Premier cas :  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)} \cap \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})} \neq \emptyset$  et la projection de  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)} \cap \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}$  sur  $\hat{f}(\mathbb{H}^2)$  intersecte l'arc  $\hat{k}_i \subset \hat{k}$ . Dans cette configuration,  $\{(\hat{x}_i, \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}); (\hat{x}_{i+1}, \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})})\}$  est une approximation polygonale de  $\hat{f}(\hat{k}_i)$ .

- Second cas :  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)} \cap \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})} = \emptyset$ . Soient  $\hat{k}_i$  le sous arc de  $\hat{k}$  qui joint  $\hat{x}_i$  à  $\hat{x}_{i+1}$ ,  $y$  un point de  $\hat{k}_i$  et  $\Pi_{\hat{f}(\hat{y})}$  un plan de support en  $\hat{f}(\hat{y})$ ; les 3 demi-espaces  $H_{\hat{f}(\hat{y})}^-$ ,  $H_{\hat{f}(\hat{x}_i)}^-$  et  $H_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}^-$  intersectent la boule  $b(\hat{f}(\hat{y}), \varepsilon) \subsetneq b(\hat{f}(\hat{y}), \frac{\log 3}{2})$ . D'après [Ga] (voir aussi [Br]) ces 3 demi-espaces ne sont pas disjoints donc  $\Pi_{\hat{f}(\hat{y})}$  intersecte  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}$  ou  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}$ . On vient de montrer que tout plan de support en  $\hat{f}(\hat{k})$  intersecte  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}$  ou  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}$ . Comme l'arc  $\hat{f}(\hat{k}_i)$  peut être étendu en un arc dans l'ensemble des plans de support en un point de  $\hat{f}(\hat{k}_i)$ , il existe  $\hat{y} \subset \text{int}(\hat{k})$  et un plan de support  $\Pi_{\hat{f}(\hat{y})}$  en  $\hat{f}(\hat{y})$  tel que  $\{(\hat{x}_i, \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}); (\hat{y}, \Pi_{\hat{f}(\hat{y})}); (\hat{x}_{i+1}, \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})})\}$  est une approximation polygonale de  $\hat{f}(\hat{k}_i)$  (cf. [KeS, paragraphe 3.4]).

- Troisième cas :  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)} \cap \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})} \neq \emptyset$  mais la projection de  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)} \cap \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}$  sur  $\hat{f}(\mathbb{H}^2)$  n'intersecte pas  $\hat{f}(\hat{k}_i)$ . Si tout plan de support en un point de  $\hat{f}(\hat{k}_i)$  intersecte  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}$  ou  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}$  alors on peut trouver  $\hat{y}$  et  $\Pi_{\hat{f}(\hat{y})}$  comme dans le cas précédent. Dans le cas contraire, il existe  $\hat{y} \in \hat{k}$  et un plan de support  $\Pi_{\hat{f}(\hat{y})}$  en  $\hat{f}(\hat{y})$  tels que  $\Pi_{\hat{f}(\hat{y})}$  n'intersecte pas  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}$  ni  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}$ . Les plans  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}$  et  $\Pi_{\hat{f}(\hat{y})}$  sont dans la configuration du deuxième cas donc il existe  $\hat{z} \subset \hat{k}_i$  entre  $\hat{x}_i$  et  $\hat{y}$  tel que  $\{(\hat{x}_i, \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}); (\hat{z}, \Pi_{\hat{f}(\hat{z})}); (\hat{y}, \Pi_{\hat{f}(\hat{y})})\}$  est une approximation polygonale du sous-arc de  $\hat{k}$  qui joint  $\hat{x}_i$  à  $\hat{y}$ . En faisant la même chose pour  $\Pi_{\hat{f}(\hat{y})}$  et  $\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}$  on obtient une approximation polygonale de  $\hat{f}(\hat{k}_i)$ .

Faisons la construction ci-dessus pour toutes les composantes de  $\hat{k} - \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_p\}$ . Dans chaque composante de  $\hat{k} - \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_p\}$ , on a ajouté au plus 3 points, on obtient donc une approximation polygonale dont la longueur est plus petite que  $4p+4$ . Appelons-la  $\{(\hat{x}_i, \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)})/i = 0, \dots, 4p+4\}$ . Notons  $\hat{k}_i \subset \hat{k}$  l'arc géodésique (éventuellement réduit à un point) qui relie  $\hat{x}_i$  à  $\hat{x}_{i+1}$ . Comme on peut étendre l'arc  $\hat{f}(\hat{k}_i)$  en un arc dans l'ensemble des plans de support en  $\hat{f}(\hat{k}_i)$ , alors, pour tout  $\delta$ , il existe des points  $\hat{y}_j \subset \hat{k}_i$ ,  $0 \leq j \leq q+1$  tels que  $\hat{y}_0 = \hat{x}_i$ ,  $\hat{y}_{q+1} = \hat{x}_{i+1}$ ,  $\theta(\Pi_{\hat{f}(\hat{y}_j)}, \Pi_{\hat{f}(\hat{y}_{j+1})}) \leq \delta$ , et  $q \leq \frac{\theta(\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}, \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})})}{\delta} \leq \frac{\pi}{\delta}$ . En construisant de tels points dans tous les  $\hat{k}_i$ ,  $0 \leq i \leq 4p+3$ , on obtient une  $(\delta, \varepsilon)$ -approximation dont la longueur est plus petite que  $(4p+4)(\frac{\pi}{\delta} + 1)$ . Comme  $p \leq \frac{l(\hat{k})}{\varepsilon}$ , on a l'approximation polygonale recherchée.  $\square$

La proposition suivante, due à [KeS] fournit une estimation de l'erreur commise lorsque l'on approche la mesure de plissage par la somme des angles dièdres d'une approximation polygonale :

**Proposition 3.1 ([KeS], Proposition 4.8).** *Soit  $(\hat{f}, \Gamma, \rho)$  une surface plissée convexe et  $\hat{k} \subset \mathbb{H}^2$  un arc transverse à son lieu de plissage. Il existe une constante universelle  $K$ , et une fonction  $s(\delta)$ ,  $0 < s(\delta) < 1$ , telles que si  $\{(\hat{x}_i, \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)})\}$  est une  $(\delta, s(\delta))$ -approximation de l'arc  $\hat{f}(\hat{k})$ , avec*

$\delta < \frac{\pi}{2}$ , alors

$$\left| \sum_{\mathfrak{P}} \theta(\Pi_{\hat{f}(\hat{x}_i)}, \Pi_{\hat{f}(\hat{x}_{i+1})}) - \int_{\hat{k}} d\hat{\lambda} \right| < K\delta l(\hat{k})$$

En suivant [KeS], nous allons utiliser la proposition 3.1 pour prouver la continuité de la lamination géodésique mesurée de plissage d'une suite de surfaces plissées convexes.

**Lemme 3.1.3.** *Soit  $(\hat{f}_n, \Gamma_n, \rho_n)$  une suite de surfaces plissées convexes qui converge vers une surface plissée  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$ ; alors  $(\hat{\lambda}_n)$  converge pour la topologie faible\* vers une lamination géodésique mesurée  $\hat{\lambda}_\infty$  et on est dans l'une des deux situations suivantes :*

- $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$  est une surface plissée convexe et  $\hat{\lambda}_\infty$  est sa lamination géodésique mesurée de plissage;
- $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$  est une surface plissée aplatie,  $|\hat{\lambda}_\infty|$  est le lieu de plissage de  $\hat{f}_\infty$  et  $\hat{\lambda}_\infty$  est obtenue en munissant chaque feuille de  $|\hat{\lambda}_\infty|$  d'une mesure de Dirac de masse  $\pi$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 3.1.1,  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$  est une surface plissée convexe ou aplatie. Nous allons montrer que toute suite extraite de  $(\hat{f}_n, \Gamma_n, \rho_n)$  contient une sous-suite qui satisfait la conclusion du lemme, ceci est équivalent au lemme.

Considérons une suite extraite telle que  $(|\hat{\lambda}_n|)$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $\hat{L}_\infty$ ; d'après [CEG, paragraphe 5.2],  $\hat{L}_\infty$  contient le lieu de plissage de  $\hat{f}_\infty$ . Soit  $\hat{k} \subset \mathbb{H}^2$  un arc transverse à  $\hat{L}_\infty$  tel que  $\hat{f}(\hat{k})$  intersecte au plus une fois chaque feuille de  $\hat{f}_\infty(\hat{L}_\infty)$ ; comme  $(|\hat{\lambda}_n|)$  converge géométriquement vers  $\hat{f}(\hat{L}_\infty)$  et que  $(f_n)$  converge vers  $f_\infty$ , pour  $n$  assez grand,  $\hat{f}_n(\hat{k})$  intersecte au plus une fois chaque feuille de  $\hat{f}(|\hat{\lambda}_n|)$ . Fixons  $\delta < \frac{\pi}{2}$  et  $\varepsilon < s(\delta)$  et considérons, pour chaque  $n$ , une  $(\delta, \varepsilon)$ -approximation  $(\hat{x}_{i,n}, \Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})})$  de  $\hat{f}_n(\hat{k})$  dont la longueur  $p$  est plus petite que la constante  $B(\delta, \varepsilon, l(\hat{k}))$  du lemme 3.1.2. Extrayons une sous-suite telle que pour tout  $i \leq p$ , la suite  $(\hat{x}_{i,n}, \Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})})$  converge et notons  $(\hat{x}_{i,\infty}, \Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i,\infty})})$  sa limite. On obtient ainsi une  $(\delta, \varepsilon)$ -approximation  $\{(\hat{x}_{i,\infty}, \Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i,\infty})})\}$  de  $\hat{f}_\infty(\hat{k})$  de longueur inférieure à  $p = B(\delta, \varepsilon, l(\hat{k}))$ .

**Affirmation 3.1.4.** *Si  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$  est une surface plissée convexe alors  $(\hat{\lambda}_n)$  converge vers sa lamination géodésique mesurée de plissage  $\hat{\lambda}_\infty$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$  est une surface plissée convexe et notons  $\hat{\lambda}_\infty$  sa lamination géodésique mesurée de plissage. Rappelons que  $\hat{\lambda}_n$  converge vers  $\hat{\lambda}_\infty$  si pour tout arc  $\hat{k} \subset \mathbb{H}^2$  transverse à  $|\hat{\lambda}_\infty|$ ,  $\int_{\hat{k}} d\hat{\lambda}_n$  converge vers  $\int_{\hat{k}} d\hat{\lambda}_\infty$ .

Soient  $k \subset \mathbb{H}^2$  un arc transverse à  $|\hat{\lambda}_\infty|$  et  $\{(\hat{x}_{i,n}, \Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})})\}$  les  $(\delta, \varepsilon)$ -approximations construites ci-dessus. Pour tout  $i \leq p$ ,  $\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})}$  converge vers  $\Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i,\infty})}$ , donc pour  $n$  assez grand,  $\sum_{i=1}^p |\theta(\Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i,\infty})}, \Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i+1,\infty})}) - \theta(\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})}, \Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i+1,n})})| \leq \delta$ . D'après la proposition 3.1,  $|\sum_{i=1}^{q-1} \theta(\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})}, \Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i+1,n})}) - \int_{\hat{k}} d\hat{\lambda}_n| < K\delta l(\hat{k})$  pour tout  $n \in \bar{\mathbb{N}}$ . On a donc  $|\int_{\hat{k}} d\hat{\lambda}_\infty - \int_{\hat{k}} d\hat{\lambda}_n| < 2K\delta l(\hat{k}) + \delta$ . En faisant tendre  $\delta$  vers 0, on obtient  $\int_{\hat{k}} d\hat{\lambda}_n \rightarrow \int_{\hat{k}} d\hat{\lambda}_\infty$ . Ceci étant vrai pour tout arc  $\hat{k}$  transverse à  $|\hat{\lambda}_\infty|$ ,  $\hat{\lambda}_n$  converge vers  $\hat{\lambda}_\infty$ .  $\square$

Nous allons ensuite étudier le cas où  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$  est une surface plissée aplatie. Commençons par montrer que les feuilles du lieu de plissage  $|\hat{\lambda}_\infty|$  de  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$  sont toutes des feuilles isolées, c'est-à-dire que leurs projections sur  $\mathbb{H}^2/\Gamma_\infty$  sont des feuilles isolées. Ceci nous permettra de garantir qu'en munissant chaque feuille de  $|\hat{\lambda}_\infty|$  d'une mesure de Dirac de poids  $\pi$ , on obtient bien une lamination géodésique mesurée (dont la projection sur  $\mathbb{H}^2/\Gamma_\infty$  n'a pas a priori un support compact).

**Affirmation 3.1.5.** Lorsque  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$  est une surface plissée aplatie, le lieu de plissage  $|\hat{\lambda}_\infty|$  de  $\hat{f}_\infty$  est constitué de feuilles isolées.

*Démonstration.* Choisissons deux points successifs distincts  $\hat{x}_{i,\infty}$  et  $\hat{x}_{i+1,\infty}$  et notons  $\hat{k}_i$  le sous-arc de  $\hat{k}$  joignant  $\hat{x}_{i,\infty}$  à  $\hat{x}_{i+1,\infty}$ . Soient  $\hat{y}$  un point de  $\text{int}(\hat{k}_i)$  et  $(\Pi_{\hat{f}_n(\hat{y})})$  une suite de plans de support en  $\hat{f}_n(\hat{y})$  qui converge vers un plan de support  $\Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{y})}$  en  $\hat{f}_\infty(\hat{y})$ ; pour  $n$  assez grand,  $\hat{y}$  appartient au sous-arc de  $\hat{k}$  reliant  $\hat{x}_{i,n}$  à  $\hat{x}_{i+1,n}$ . Comme  $\{(\hat{x}_{i,n}, \Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})})\}$  est une  $(\delta, \varepsilon)$ -approximation,  $\Pi_{\hat{f}_n(\hat{y})}$  intersecte à la fois  $\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})}$  et  $\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i+1,n})}$  et  $\theta(\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})}, \Pi_{\hat{f}_n(\hat{y})}) \leq \delta$ ,  $\theta(\Pi_{\hat{f}_n(\hat{y})}, \Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i+1,n})}) \leq \delta$ . En passant à la limite, on obtient  $\theta(\Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{y})}, \Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i,\infty})}) \leq \delta$  et  $\theta(\Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{y})}, \Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i+1,\infty})}) \leq \delta$ . Comme  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$  est une surface plissée aplatie, l'angle dièdre entre deux plans de support en des points différents appartient à  $\{0, \pi\}$  donc  $\theta(\Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{y})}, \Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i,\infty})}) = 0$  et  $\theta(\Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{y})}, \Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i+1,\infty})}) = 0$ . Ceci entraîne que pour tout arc  $\hat{k} \subset \text{int}(\hat{k}_i)$ ,  $i(\hat{k}, \hat{\lambda}_n) \rightarrow 0$ . En reprenant la démonstration de la proposition 27 de [Bo4], on en déduit que  $\text{int}(\hat{k}_i)$  n'intersecte pas le lieu de plissage de  $\hat{f}_\infty$ .

On a ainsi montré que l'intersection de  $\hat{k}$  avec le lieu de plissage de  $\hat{f}_\infty$  est contenue dans  $\{\hat{x}_i/i = 1 \dots p\}$ , en particulier, cette intersection a un cardinal fini. Ceci conclut la preuve de l'affirmation.  $\square$

On sait maintenant que  $|\hat{\lambda}_\infty|$  est constituée de feuilles isolées.. En munissant chaque feuille de  $|\hat{\lambda}_\infty|$  d'une mesure de Dirac de poids  $\pi$ , on obtient une lamination géodésique mesurée  $\hat{\lambda}_\infty$  (dont le support n'est pas a priori compact).

Notons  $r = \inf\{d(\hat{x}_1, \hat{x}_2)/\hat{x}_1 \text{ et } \hat{x}_2 \text{ sont deux points distincts de } \hat{k} \cap |\hat{\lambda}_\infty|\}$ ; d'après la preuve de l'affirmation 3.1.5,  $r > 0$ . Si  $\{(\hat{x}_{i,\infty}, \Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i,\infty})})\}$  est une  $(\delta, \varepsilon)$ -approximation satisfaisant  $\varepsilon < r$ , on a  $\sum_{i=1}^{q-1} \theta(\Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i,\infty})}, \Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i+1,\infty})}) = \int_{\hat{k}} d\hat{\lambda}_\infty$ .

En remplaçant la proposition 3.1 par cette égalité dans la preuve de l'affirmation 3.1.4 on obtient l'affirmation suivante qui conclut la preuve du lemme 3.1.3 :

**Affirmation 3.1.6.** La suite  $(\hat{\lambda}_n)$  converge vers  $\hat{\lambda}_\infty$  dans  $\mathcal{ML}(\mathbb{H}^2)$ .

Remarquons que dans le cas où  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$  est aplatie, nous n'avons pas montré que la projection de  $|\hat{\lambda}_\infty|$  sur  $\mathbb{H}/\Gamma_\infty$  est compacte. Nous verrons néanmoins dans la suite que c'est bien le cas.  $\square$

Nous allons maintenant préciser la description de  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$  lorsque c'est une surface plissée aplatie.

**Lemme 3.1.7.** Soit  $(\hat{f}_n, \Gamma_n, \rho_n)$  une suite de surfaces plissées convexes qui converge vers une surface plissée aplatie  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$ ; alors il existe une surface  $S$  à bord géodésique, telle que  $\mathbb{H}^2/\Gamma_\infty$  est le double de  $S$  et que le lieu de plissage  $|\hat{\lambda}_\infty|$  de  $\hat{f}_\infty$  se projette sur  $\partial S \subset \mathbb{H}/\Gamma_\infty$ . De plus  $\partial S$  est compact.

*Démonstration.* En premier lieu, l'affirmation suivante va nous permettre de définir  $S$ .

**Affirmation 3.1.8.** Toutes les composantes connexes de  $\mathbb{H}^2 - |\hat{\lambda}_\infty|$  ont la même image par  $\hat{f}_\infty$ .

*Démonstration.* Rappelons tout d'abord que comme  $\hat{f}_\infty$  est une surface plissée, la restriction de  $\hat{f}_\infty$  à chaque composante connexe de  $\mathbb{H}^2 - |\hat{\lambda}_\infty|$  est injective.

Supposons que l'affirmation 3.1.8 n'est pas satisfaite, il existe alors deux composantes connexes  $\hat{P}$  et  $\hat{P}'$  de  $\mathbb{H}^2 - |\hat{\lambda}_\infty|$  dont les adhérences s'intersectent et dont les images par  $\hat{f}_\infty$  sont différentes. Il existe donc un point  $\hat{y}$  contenu dans le bord de l'adhérence de  $\hat{P}$  tel que  $f_\infty(\hat{y}) \subset \hat{f}_\infty(\hat{P}')$  ou un point  $\hat{y}$  contenu dans le bord de l'adhérence de  $\hat{P}'$  tel que  $\hat{f}_\infty(\hat{y}) \subset f_\infty(\hat{P})$ ; ces deux cas étant similaires, nous allons seulement traiter le premier. Notons  $\hat{l}$  la feuille de  $|\hat{\lambda}_\infty|$  qui contient  $\hat{y}$ ;



d'après la preuve de l'affirmation 3.1.5,  $\hat{l}$  est isolée. Soit  $\hat{k} \subset \mathbb{H}^2$  un arc géodésique transverse à  $\hat{l}$  tel que  $\hat{k} \cap |\hat{\lambda}_\infty| = \{y\}$ ; pour  $n \in \mathbb{N}$ , considérons les  $(\delta, \varepsilon)$ -approximations  $(\hat{x}_{i,n}, \Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})})$  de  $\hat{f}_n(\hat{k})$  qui ont été construites au début de la preuve du lemme 3.1.3 et notons  $p = B(\delta, \varepsilon, l(\hat{k}))$  un majorant de leur longueur. D'après l'affirmation 3.1.6, la mesure de plissage sur  $\hat{k}$  tend vers une mesure de Dirac de poids  $\pi$  et de support  $\{y\}$ . On en déduit l'existence d'un  $i$  tel que  $(\hat{x}_{i,n})$  et  $(\hat{x}_{i+1,n})$  convergent vers  $y$  et que  $\frac{\pi}{p} \leq \theta(\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})}, \Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i+1,n})}) \leq \delta$  pour  $n$  assez grand.

Soit  $\hat{z}$  le point de  $\hat{P}'$  tel que  $\hat{f}_\infty(\hat{z}) = \hat{f}_\infty(y)$ ; pour chaque  $n$ ,  $\hat{z}$  est contenu ou bien dans une composante  $\hat{P}'_n$  de  $\mathbb{H}^2 - |\hat{\lambda}_n|$  ou bien dans les adhérences de deux composantes de  $\mathbb{H}^2 - |\hat{\lambda}_n|$  et nous noterons  $\hat{P}'_n$  l'intérieur de la réunion des adhérences de ces deux composantes. Considérons une suite extraite telle que  $\hat{P}'_n$  converge vers une sous-surface ouverte  $\hat{P}'_\infty$  de  $\hat{P}'$  (on peut par exemple choisir une suite extraite telle que  $|\hat{\lambda}_n|$  converge géométriquement). Comme  $\hat{f}_n$  converge vers  $\hat{f}_\infty$  sur tout compact alors  $\hat{f}_n(\hat{P}'_n)$  converge vers  $\hat{f}_\infty(\hat{P}'_\infty) \subset \hat{f}_\infty(\hat{P}')$ .

Du fait que  $\hat{f}_\infty(\hat{P}'_\infty)$ ,  $\Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i,\infty})}$  et  $\Pi_{\hat{f}_\infty(\hat{x}_{i+1,\infty})}$  contiennent  $\hat{f}_\infty(\hat{y})$ , et que  $\frac{\pi}{p} \leq \theta(\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})}, \Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i+1,n})}) \leq \delta$ , on déduit que pour  $n$  assez grand,  $\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i,n})}$  ou  $\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x}_{i+1,n})}$  intersecte  $\hat{f}_n(\hat{P}'_n)$  transversalement. Ceci contredit la convexité de  $(\hat{f}_n, \Gamma_n, \rho_n)$  et achève la preuve de l'affirmation.  $\square$

Nous allons ensuite montrer que le quotient de  $\mathbb{H}^2 - |\hat{\lambda}_\infty|$  par  $\Gamma_\infty$  possède deux composantes connexes.

Extrayons une sous-suite telle que  $|\hat{\lambda}_n|$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $\hat{L}_\infty$  et considérons deux points  $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{H}^2 - \hat{L}_\infty$  tels que  $\hat{f}_\infty(\hat{x}) = \hat{f}_\infty(\hat{y})$ . Notons  $\hat{P}'_{\hat{x}}$  et  $\hat{P}'_{\hat{y}}$  les composantes connexes de  $\mathbb{H}^2 - |\hat{\lambda}_\infty|$  qui contiennent  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  et supposons que  $H^+_{\hat{f}_\infty(\hat{P}'_{\hat{x}})} = H^+_{\hat{f}_\infty(\hat{P}'_{\hat{y}})}$ ; montrons qu'il existe  $g_\infty \in \Gamma_\infty$  tel que  $\hat{x} = g_\infty \hat{y}$ .

Comme  $H^+_{\hat{f}_n(\hat{P}'_{\hat{x}})}$  et  $H^+_{\hat{f}_n(\hat{P}'_{\hat{y}})}$  convergent vers  $H^+_{\hat{f}_\infty(\hat{P}'_{\hat{x}})}$  et comme  $\hat{f}_n(\hat{P}'_{\hat{y}}) \subset H^+_{\hat{f}_n(\hat{P}'_{\hat{x}})}$  et  $\hat{f}_n(\hat{P}'_{\hat{x}}) \subset H^+_{\hat{f}_n(\hat{P}'_{\hat{y}})}$ ,  $\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x})}$  et  $\Pi_{\hat{f}_n(\hat{y})}$  s'intersectent pour  $n$  assez grand et  $\theta(\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x})}, \Pi_{\hat{f}_n(\hat{y})})$  tend vers 0. On en déduit que la distance  $d_{(\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x})} \cup \Pi_{\hat{f}_n(\hat{y})})}(\hat{f}_n(\hat{x}), \hat{f}_n(\hat{y}))$  mesurée sur  $\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x})} \cup \Pi_{\hat{f}_n(\hat{y})}$  tend vers 0. Comme  $d_{(\Pi_{\hat{f}_n(\hat{x})} \cup \Pi_{\hat{f}_n(\hat{y})})}(\hat{f}_n(\hat{x}), \hat{f}_n(\hat{y})) \geq d_{\hat{f}_n(\mathbb{H}^2)}(\hat{f}_n(\hat{x}), \hat{f}_n(\hat{y}))$  et comme  $\hat{f}_\infty$  est un homéomorphisme local sur le complémentaire de  $|\hat{\lambda}_\infty|$  alors, pour  $n$  assez grand,  $\exists a_n \in \Gamma_n$  tel que  $d_{\mathbb{H}^2}(a_n \hat{y}, \hat{x}) \rightarrow 0$ . Les  $a_n$  déplacent  $\hat{y}$  d'une distance bornée donc, quitte à extraire une sous-suite,  $(a_n)$  converge vers un élément  $a_\infty \in \Gamma_\infty$ . On a alors  $a_\infty \hat{y} = \hat{x}$ .

On en déduit que chaque point de  $\hat{f}_n(\mathbb{H}^2 - |\hat{\lambda}_\infty|)$  a au plus deux images réciproques dans  $\mathbb{H}^2/\Gamma_\infty$ . De l'affirmation 3.1.8 on déduit qu'il existe une surface  $S$  telle que  $\mathbb{H}^2/\Gamma_\infty$  est le double de  $S$  et que le lieu de plissage  $|\hat{\lambda}_\infty|$  de  $\hat{f}_\infty$  se projette sur  $\partial S \subset \mathbb{H}^2/\Gamma_\infty$ .

Il nous reste à montrer que  $\partial S$  est compacte. Supposons le contraire,  $\partial S$  contient alors deux demi-géodésiques asymptotes. Soit  $\hat{k} \subset S$  un arc géodésique qui joint ces deux demi-géodésiques; le double de  $\hat{k}$  est une courbe simple  $c \subset \mathbb{H}^2/\Gamma_\infty$  qui borde une pointe de  $\mathbb{H}^2/\Gamma_\infty$ . L'image de  $c$  par  $f_\infty$  est  $f_\infty(\hat{k})$  et elle est parcourue deux fois. La courbe  $f_\infty(c)$  est donc homotope à un point dans  $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\Gamma_\infty)$ , ce qui contredit l'hypothèse que les éléments paraboliques de  $\Gamma_\infty$  sont envoyés dans des éléments paraboliques par  $\rho_\infty$ .  $\square$

## 3.2 Conditions nécessaires

Dans cette section, nous allons montrer que les conditions  $a)$ ,  $b)$ ,  $b_1)$ ,  $b_2)$  et  $c)$  sont vérifiées par la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie. Revenons tout d'abord sur quelques définitions.

Soit  $\sigma$  une métrique hyperbolique géométriquement finie sur  $\text{int}(M)$  et  $\rho$  une représentation

associée à  $\sigma$ . Si  $\rho$  n'est pas une métrique fuchsienne, il existe une multi-courbe  $\lambda^{(p)}$  correspondant aux pointes de rang 1 de  $\sigma$  et un homéomorphisme  $h : M - (\lambda^{(p)} \cup \partial_{\chi=0}M) \rightarrow N(\rho)$  associé à  $\sigma$  (cf. début du chapitre 2). La restriction de  $h$  à  $\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)}$  est une surface plissée convexe. Munissons chaque feuille de  $\lambda^{(p)}$  d'une mesure de Dirac de masse  $\pi$  et ajoutons à cette multi-courbe pondérée la lamination géodésique mesurée de plissage de  $h|_{\partial_{\chi<0}M - \lambda^{(p)}}$ ; on obtient ainsi la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\sigma$ .

Nous allons prouver qu'une lamination géodésique mesurée de plissage vérifie les conditions a), b<sub>1</sub>) et c). D'après la proposition 2.2, ceci permet de conclure.

**Proposition 3.2.** *Soit  $\lambda$  la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie non fuchsienne  $\sigma$  sur l'intérieur d'une variété hyperbolique compacte de dimension 3; alors  $\lambda$  vérifie les conditions suivantes :*

- a) toute feuille fermée de  $\lambda$  a un poids inférieur ou égal à  $\pi$ ;
- b<sub>1</sub>) la lamination géodésique mesurée  $\lambda$  est anannulaire;
- c)  $i(\lambda, \partial D) > 2\pi$  pour tout disque essentiel  $D$ .

*Démonstration.* La condition a) vient de la définition de la mesure de plissage.

Notons  $\lambda^{(p)}$  la réunion des feuilles de poids  $\pi$  de  $\lambda$ . Soit  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow Isom(\mathbb{H}^3)$  une représentation associée à  $\sigma$ ; notons  $C(\rho)$  l'enveloppe convexe de l'ensemble limite de  $\rho(\pi_1(M))$  et identifions  $\tilde{M} - p^{-1}(\lambda^{(p)} \cup \partial_{\chi=0}M)$  à  $C(\rho)$  en relevant un homéomorphisme associé à  $\sigma$ .

La condition c) vient de la formule de Gauss-Bonnet appliquée à un disque essentiel simplicial. Soit  $D \subset M$  un disque essentiel; notons  $\tilde{D} \subset \tilde{M}$  un relevé de  $D$ . Comme on a identifié  $\tilde{M} - p^{-1}(\lambda^{(p)} \cup \partial_{\chi=0}M)$  et  $C(\rho)$ , on peut considérer que  $\tilde{D} \subset C(\rho)$ . Modifions  $\tilde{D}$  par une homotopie de façon que  $\partial\tilde{D}$  soit une géodésique de  $\partial C(\rho)$  (si  $\partial D$  intersecte une feuille de poids  $\pi$  de  $\lambda$ ,  $\tilde{D} \subset C(\rho)$  est un disque idéal, c'est-à-dire qu'il a une pointe correspondant à ce point d'intersection). Considérons des suite  $\delta_n \rightarrow 0$  et  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  et des  $(\delta_n, \varepsilon_n)$ -approximations  $\{(x_{i,n}, \Pi_{i,n})\}_{i \leq p_n}$  de  $\partial D$  telles que  $\{(x_{i,n}, \Pi_{i,n})\}_{i \leq p_n} \subset \{(x_{i,n+1}, \Pi_{i,n+1})\}_{i \leq p_{n+1}}$ . Soit  $\mathcal{V} \subset \mathbb{H}^3$  un voisinage tubulaire de  $\partial\tilde{D}$ ; si  $\Pi_{i-1,n} \cap \Pi_{i,n} = \Pi_{i,n} \cap \Pi_{i+1,n}$  on notera  $\bar{A}_{i,n}$  l'arc  $\Pi_{i-1,n} \cap \Pi_{i,n} \cap \mathcal{V}$ , sinon  $\Pi_{i-1,n} \cap \Pi_{i,n} \cap \mathcal{V}$  et  $\Pi_{i,n} \cap \Pi_{i+1,n} \cap \mathcal{V}$  séparent  $\Pi_{i,n} \cap \mathcal{V}$  en trois composantes connexes et on notera  $A_{i,n}$  celle dont l'adhérence  $\bar{A}_{i,n}$  intersecte  $\Pi_{i-1,n}$  et  $\Pi_{i+1,n}$ . Pour  $n$  fixé, notons  $A_n = \bigcup_{i \leq p_n} \bar{A}_{i,n}$ ; pour  $n$  assez grand,  $A_n$  est un anneau plongé, homotope à  $\partial\tilde{D}$ . On munit  $A_n$  de la métrique induite par la longueur des arcs rectifiables; par construction  $A_n$  est une surface localement réglée, cette métrique est donc localement isométrique à  $\mathbb{H}^2$  (cf. [Ro]). Soit  $\tilde{c}_n \subset A_n$  la courbe homotope à  $\partial\tilde{D}$  qui minimise la longueur (il est a priori possible que  $\tilde{c}_n \cap \partial A_n \neq \emptyset$ ). Comme  $\delta_n \rightarrow 0$  et comme  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $A_n$  et  $\partial A_n$  converge respectivement vers  $A_\infty = \mathcal{V} \cap \partial C(\rho)$  et  $\partial A_\infty$  pour la topologie de Hausdorff. On en déduit que, quitte à extraire une sous-suite,  $\tilde{c}_n$  converge vers une courbe  $\tilde{c}_\infty$ . Cette courbe minimise la longueur et est isotope à  $\partial\tilde{D}$ , on a donc  $\tilde{c}_\infty = \partial\tilde{D}$ . Comme  $\partial\tilde{D} \cap \partial A_\infty = \emptyset$ , on a pour  $n$  assez grand  $\tilde{c}_n \cap \partial A_n = \emptyset$ . On en déduit que  $\tilde{c}_n$  est une géodésique pour la métrique de  $A_n$ .

La courbe  $\tilde{c}_n$  intersecte un certain nombre d'arêtes de  $A_n$  (comptées avec multiplicité), notons  $\theta_n$  la somme des angles dièdres externes de  $A_n$  en chacune de ces arêtes. D'après [EpM], la suite  $(\theta_n)$  converge vers  $i(\partial D, \lambda)$ . Soit  $\tilde{x}_n$  un point de  $\tilde{c}_n$  contenu dans une arête de  $A_n$ ; considérons, comme dans [BoO], le cône géodésique  $\tilde{D}_n$  sur  $\tilde{c}_n$  issu de  $\tilde{x}_n$ . Ce cône  $\tilde{D}_n$  est un disque simplicial (dont nous noterons l'aire  $t_n$ ) bordé par  $\tilde{c}_n$ . Comme  $\tilde{c}_n$  est une géodésique pour la métrique de  $A_n$ , l'angle externe en chaque sommet de  $\tilde{D}_n$  est plus petit que l'angle dièdre correspondant. En appliquant la formule de Gauss-Bonnet à chacun des triangles géodésiques qui composent  $\tilde{D}_n$ , on en déduit que  $\theta_n \geq 2\pi + t_n$ . Quitte à extraire, on peut supposer que  $\tilde{x}_n$  converge vers un point  $\tilde{x} \subset \partial\tilde{D}$ . Soient  $\tilde{P}$  une composante connexe de  $\partial C(\rho) - p^{-1}(\lambda)$  telle que  $\tilde{x} \notin \tilde{P}$ , que  $\tilde{P} \cap \partial\tilde{D} \neq \emptyset$  et que pour  $n$  assez grand  $\tilde{P} \cap A_n \neq \emptyset$  et  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$  deux points distincts de  $\tilde{P} \cap \partial\tilde{D}$ ; notons  $t$  l'aire du triangle géodésique de sommets  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$ . Pour  $n$  assez grand, le triangle géodésique de

sommets  $\tilde{x}_n, \tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$  est contenu dans  $\tilde{D}_n$  et a une aire supérieure à  $\frac{t}{2}$ . En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on conclut que  $i(\partial D, \lambda) \geq 2\pi + \frac{t}{2} > 2\pi$ .

Montrons enfin que  $\lambda$  vérifie la condition  $b_1$ ). Munissons  $\partial_{\chi < 0} M$  d'une métrique hyperbolique complète qui nous servira de référence et considérons une géodésique simple  $l \subset \partial M$  qui n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement. Soit  $\tilde{l} \subset C(\rho)$  un relevé de  $l$ ; alors ou bien  $\tilde{l}$  est une géodésique de  $\mathbb{H}^3$ , ou bien  $l$  est une feuille de poids  $\pi$  de  $\lambda$ . Si  $l$  est une courbe parabolique, alors il découle de la géométrie des pointes de  $\sigma$  (cf. [Mo]) que  $l$  ne peut pas être une feuille de poids  $\pi$  de  $\lambda$ . Un relevé  $\tilde{l}$  de  $l$  est donc une géodésique de  $\mathbb{H}^3$  et les deux bouts (dans  $\partial\overline{\mathbb{H}^3}$ ) de  $\tilde{l}$  sont confondus avec le point fixe d'un élément parabolique de  $\rho(\pi_1(M))$ . Ceci est impossible car une géodésique de  $\mathbb{H}^3$  a deux bouts distincts. La lamination géodésique  $\lambda$  intersecte donc toutes les courbes paraboliques.

Soient  $\tilde{l}_1$  et  $\tilde{l}_2$  deux géodésiques biasymptotes qui n'intersectent pas  $p^{-1}(\lambda)$  transversalement; d'après la géométrie des pointes de  $\sigma$ , au moins une de ces deux géodésiques,  $\tilde{l}_1$  par exemple, ne se projette pas sur une feuille de poids  $\pi$  de  $\lambda$ . Si  $l_2 = p(\tilde{l}_2)$  est une feuille de poids  $\pi$  de  $\lambda$ , alors les deux bouts de  $\tilde{l}_1$  sont confondus avec le point fixe d'un élément parabolique de  $\rho(\pi_1(M))$  ce qui est impossible, comme on l'a vu au paragraphe précédent. Comme  $\tilde{l}_1$  et  $\tilde{l}_2 \subset \partial C(\rho)$  n'intersectent pas  $p^{-1}(\lambda)$ , ce sont des géodésiques de  $\mathbb{H}^3$ . Comme deux points de  $\partial\overline{\mathbb{H}^3}$  sont joints par une unique géodésique et que  $\tilde{l}_1$  et  $\tilde{l}_2$  sont biasymptotes,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2$ . On a ainsi montré que  $\lambda$  intersecte transversalement toutes les laminations annulaires.

Des deux paragraphes précédents, on déduit que  $\lambda$  satisfait  $b_1$ ).  $\square$

### 3.3 La topologie de $\mathcal{ML}/\mathcal{R}$

Rappelons la définition de  $\mathcal{R}$  qui était donnée dans l'introduction.

Soient  $\lambda, \mu \in \mathcal{ML}(\partial M)$ ; notons  $\lambda'$  (resp.  $\mu'$ ) la lamination géodésique mesurée obtenue en remplaçant par  $\pi$  le poids des feuilles compactes de  $\lambda$  (resp.  $\mu$ ) dont le poids excède  $\pi$ . On dira que  $\lambda$  est congrue à  $\mu$  modulo  $\mathcal{R}$ , et on notera  $\lambda \mathcal{R} \mu$ , si et seulement si  $\lambda' = \mu'$ . On note  $\dot{\lambda}$  la classe de  $\lambda$  modulo  $\mathcal{R}$ .

Soient  $(\lambda_n)$  une suite de laminations géodésiques mesurées telle que  $(\dot{\lambda}_n)$  tend vers  $\dot{\lambda}$  dans  $\mathcal{ML}(\partial M)/\mathcal{R}$  et  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$  un représentant de  $\dot{\lambda}$ ; notons  $\lambda^{(p)}$  la réunion des feuilles compactes de  $\lambda$  dont le poids est plus grand que  $\pi$ . On a alors l'affirmation suivante :

**Affirmation 3.3.1.** *Soient  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$  et  $\lambda'$  (resp.  $\mu'$ ) le représentant de  $\dot{\lambda}$  dont toutes les feuilles compactes ont un poids inférieur ou égal à  $\pi$ . Pour tout arc simple  $k \subset \partial M$  tel que les points de  $k \cap |\dot{\lambda}|$  sont des intersections transverses, on a  $\int_k d\lambda' \leq \underline{\lim} \int_k d\lambda_n$ . De plus, si  $k$  n'intersecte pas de feuille compacte de poids  $\pi$  de  $\lambda'$ , alors  $\int_k d\lambda_n$  converge vers  $\int_k d\lambda$ .*

*Démonstration.* Soit  $k \subset \partial M$  un arc tel que les points de  $k \cap |\dot{\lambda}|$  sont des intersections transverses; l'ensemble  $\mathcal{V}_{k,\varepsilon}(\lambda) = \{\gamma \in \mathcal{ML}(\partial M) \mid |\int_k d\gamma - \int_k d\lambda| < \varepsilon\}$  est un voisinage de  $\lambda$ . Comme  $\dot{\lambda}_n$  converge vers  $\dot{\lambda}$ , pour tout  $\varepsilon$ ,  $\exists n_\varepsilon$  tel que pour tout  $n \geq n_\varepsilon$ ,  $\exists \alpha_n$  avec  $\alpha_n \mathcal{R} \lambda$  et  $\lambda_n \in \mathcal{V}_{k,\varepsilon}(\alpha_n)$ . On en déduit que pour  $n \geq n_\varepsilon$ ,  $|\int_k d\alpha_n - \int_k d\lambda_n| < \varepsilon$ . Comme  $\int_k d\lambda' \leq \int_k d\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{ML}(\partial M)$  satisfaisant  $\alpha \mathcal{R} \lambda$ , on obtient ainsi  $\int_k d\lambda' \leq \underline{\lim} \int_k d\lambda_n$ .

Si  $k$  n'intersecte pas de feuille compacte de poids  $\pi$  de  $\lambda'$  alors on a  $\int_k d\alpha = \int_k d\lambda$  pour tout  $\alpha$  tel que  $\alpha \mathcal{R} \lambda$ . On a alors  $\varepsilon > |\int_k d\alpha_n - \int_k d\lambda_n| = |\int_k d\lambda - \int_k d\lambda_n|$  pour  $n \geq n_\varepsilon$ . En passant à la limite, il s'en suit que  $\int_k d\lambda_n$  converge vers  $\int_k d\lambda$ .  $\square$

Dans le même ordre d'idée, on a :

**Affirmation 3.3.2.** *Soit  $c$  une courbe simple compacte qui n'intersecte pas  $\lambda^{(p)}$  transversalement; la suite  $i(c, \lambda_n)$  converge vers  $i(c, \lambda)$ .*

*Démonstration.* Si les points de  $c \cap |\dot{\lambda}|$  sont des intersections transverses, alors il suffit de découper  $c$  en deux arcs et d'appliquer l'affirmation 3.3.1 à chacun de ces arcs pour prouver l'affirmation 3.3.2.

Considérons maintenant le cas où  $c \subset |\dot{\lambda}|$ . Nous allons montrer que toute suite extraite de  $(\lambda_n)$  contient une sous-suite telle que  $i(c, \lambda_n)$  converge vers  $i(c, \lambda) = 0$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite  $|\lambda_n|$  converge géométriquement. Soit  $\tau$  un réseau ferroviaire qui porte tous les  $\lambda_n$  pour  $n$  assez grand ; d'après l'affirmation 3.3.3 ci-dessous,  $\lambda$  est portée par un sous-réseau ferroviaire de  $\tau$ . Soient  $b_1, b_2, \dots, b_p$  les branches de  $\tau$  ; étant donnée une lamination géodésique mesurée  $\alpha$  portée par un sous-réseau de  $\tau$ , la mesure  $b_i(\alpha)$  d'une traverse de  $b_i$  est indépendante du choix de la traverse. D'après l'affirmation 3.3.1, si  $b_i$  est une branche de  $\tau$  ne portant aucune feuille de  $\lambda^{(p)}$ , alors  $b_i(\lambda_n) \rightarrow b_i(\lambda)$ . Comme  $c$  est une feuille de  $\lambda$ , elle est portée par un sous-réseau ferroviaire  $\tau_c$  de  $\tau$ , et, pour  $n$  assez grand,  $i(c, \lambda_n) = \frac{1}{2} \sum_{j \in J} b_j(\lambda_n)$  où  $\{b_j, j \in J\}$  est l'ensemble des branches de  $\tau - \tau_c$  qui intersectent  $\tau_c$ . Une telle branche  $b_j$  ne porte aucune feuille de  $\lambda^{(p)}$ , donc d'après l'affirmation 3.3.1,  $b_j(\lambda_n) \rightarrow b_j(\lambda) = 0$ . Finalement, on a  $i(c, \lambda_n) \rightarrow 0 = i(c, \lambda)$ .  $\square$

Soient  $\lambda, \mu \in \mathcal{ML}(\partial M)$  ; si  $\lambda \mathcal{R} \mu$ , alors  $\lambda$  et  $\mu$  ont le même support. Cette remarque nous permet de définir le support  $|\dot{\lambda}|$  d'un élément  $\dot{\lambda}$  de  $\mathcal{ML}(\partial M)$  comme le support d'un représentant de  $\dot{\lambda}$ .

Notons  $\mathcal{ML}(\partial M)$  l'espace des laminations géodésiques mesurées sur  $\partial M$  muni de la topologie faible\*. Lorsque  $\mathcal{ML}(\partial M)/\mathcal{R}$  est muni de la topologie quotient, on a la propriété suivante :

**Affirmation 3.3.3.** *Soit  $(\lambda_n)$  une suite de laminations géodésiques mesurées telle que  $(\dot{\lambda}_n)$  converge vers  $\dot{\lambda}$  et que  $|\lambda_n|$  converge géométriquement vers  $L$  ; alors  $|\dot{\lambda}| \subset L$ .*

*Démonstration.* Soient  $x$  un point de  $|\dot{\lambda}|$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $k$  un arc géodésique transverse à  $|\dot{\lambda}|$ , de longueur  $\varepsilon$  et dont l'intérieur contient  $x$ . Comme  $\int_k d\lambda' > 0$ , de l'affirmation 3.3.1 on déduit que pour  $n$  assez grand  $\int_k d\lambda_n \geq \frac{\int_k d\lambda'}{2} > 0$ . Par conséquent  $k$  intersecte  $\lambda_n$  et  $x$  appartient à un  $\varepsilon$ -voisinage de  $|\lambda_n|$ . En construisant un recouvrement de  $|\dot{\lambda}|$  par des boules de rayon  $\varepsilon$  dont le centre appartient à  $|\dot{\lambda}|$ , on en déduit que, pour  $n$  assez grand,  $|\dot{\lambda}|$  appartient à un  $\varepsilon$ -voisinage de  $|\lambda_n|$ . En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on conclut que  $|\dot{\lambda}| \subset L$ .  $\square$

L'affirmation 3.3.1 permet aussi de montrer que  $\mathcal{ML}(\partial M)/\mathcal{R}$  est séparable.

**Lemme 3.3.4.** *L'espace  $\mathcal{ML}(\partial M)/\mathcal{R}$  est séparable.*

*Démonstration.* Soient  $\lambda_n, \lambda$  et  $\mu$  des laminations géodésiques mesurées telles que  $\dot{\lambda}_n$  converge à la fois vers  $\dot{\lambda}$  et vers  $\dot{\mu}$  ; notons  $\lambda^{(p)}$  (resp.  $\mu^{(p)}$ ) la réunion des feuilles compactes de  $\lambda$  (resp.  $\mu$ ) dont le poids excède  $\pi$  et  $\lambda'$  (resp.  $\mu'$ ) le représentant de  $\dot{\lambda}$  (resp.  $\dot{\mu}$ ) dont toutes les feuilles compactes ont un poids inférieur ou égal à  $\pi$ . Soit  $k \subset \partial M - \lambda^{(p)}$  un arc simple transverse à  $|\lambda|$  et à  $|\mu|$  tel que  $\int_k d\lambda < \pi$  ; d'après l'affirmation 3.3.1,  $\int_k d\mu' \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_k d\lambda_n < \pi$ . On en déduit que  $\mu^{(p)} \subset \lambda^{(p)}$  et en inversant les rôles de  $\lambda$  et  $\mu$ , on obtient  $\mu^{(p)} = \lambda^{(p)}$ . De l'affirmation 3.3.1 on déduit également que  $\int_k d\mu = \int_k d\lambda$  pour tout arc  $k \subset \partial M - \lambda^{(p)}$ . Ceci nous permet de conclure que  $\dot{\lambda} = \dot{\mu}$ .  $\square$

### 3.4 Relations entre $\mathcal{P}(M)$ et $\mathcal{P}^+(M)$

Rappelons tout d'abord les définitions de  $\mathcal{P}(M)$  et de  $\mathcal{P}^+(M)$ .

Soit  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$  une lamination géodésique mesurée ; considérons les conditions suivantes :

- a) les feuilles de  $\lambda$  ont un poids inférieur ou égal à  $\pi$  ;
- b)  $\exists \eta > 0$  tel que, pour tout anneau essentiel  $a$ ,  $i(\partial a, \lambda) \geq \eta$  ;

- c)  $i(\lambda, \partial D) > 2\pi$  pour tout disque essentiel  $D$  ;
- d) il n'existe pas d'homéomorphisme entre  $M$  et un fibré en intervalles sur un pantalon  $P$  tel que le support de  $\lambda$  soit l'image d'une section du fibré au-dessus de  $\partial P$ .

Notons  $\mathcal{P}(M) \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  l'ensemble constitué des laminations géodésiques mesurées qui satisfont les conditions a), b) et c) et  $\mathcal{P}^+(M)$  l'ensemble constitué des laminations géodésiques mesurées qui satisfont les conditions b), c) et d).

Dans cette section, nous allons montrer que la projection  $\mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{ML}(M)/\mathcal{R}$  est injective et que son image est  $\mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$ . Ceci entraîne que chaque classe  $\dot{\lambda} \in \mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$  contient un unique élément de  $\mathcal{P}(M)$  que nous noterons  $\lambda'$  et que si  $b_{\mathcal{GF}}$  est injective, alors  $b_{\mathcal{R}}$  est injective. De plus, en associant ce résultat au théorème A (qui sera démontré au chapitre 5) on obtient que l'image de  $b_{\mathcal{R}}$  est  $\mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$ .

Comme a) + c)  $\Rightarrow$  d), alors  $\mathcal{P}(M) \subset \mathcal{P}^+(M)$ . L'injectivité de l'application  $\mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$  est une conséquence directe de la condition a). Sa surjectivité vient du lemme suivant :

**Lemme 3.4.1.** *Soit  $\lambda \in \mathcal{P}^+(M)$  une lamination géodésique mesurée ; la lamination géodésique mesurée  $\lambda'$  obtenue en remplaçant par  $\pi$  les poids des feuilles compactes de  $\lambda$  dont le poids excède  $\pi$  appartient à  $\mathcal{P}(M)$ .*

*Démonstration.* Par définition  $\lambda'$  satisfait les propriétés a) et b), il nous faut donc montrer que  $i(\lambda', \partial D) > 2\pi$  pour tout disque essentiel  $D$ . Notons  $\lambda^{(p)}$  la réunion des feuilles de  $\lambda$  qui ont un poids supérieur à  $\pi$ .

Soit  $D \subset M$  un disque essentiel ; on a  $i(\lambda, \partial D) > 2\pi$ . Si  $\partial D$  n'intersecte pas  $\lambda^{(p)}$  transversalement, alors  $i(\lambda', \partial D) = i(\lambda, \partial D) > 2\pi$ .

Si l'intersection de  $\partial D$  et de  $\lambda^{(p)}$  est un point  $x$ , notons  $c$  la feuille de  $\lambda^{(p)}$  qui contient  $x$ . Soit  $\mathcal{V}$  un petit voisinage de  $c \cup D$  ;  $\mathcal{V}$  est un tore solide. Notons  $D'$  l'adhérence de  $\partial \mathcal{V} - \partial M$ ,  $D'$  est un disque proprement plongé dans  $M$  qui n'intersecte pas  $\lambda^{(p)}$  donc  $i(\partial D', \lambda') = i(\partial D', \lambda)$ . Si  $D'$  n'est pas essentiel, alors  $\partial D'$  borde un disque  $D'' \subset \partial M$ . Comme  $M$  est irréductible,  $D' \cup D''$  borde une boule  $B \subset M$ , et  $M = B \cup \mathcal{V}$  est un tore solide. Par hypothèse,  $M$  n'est pas un tore solide donc  $D'$  est essentiel et  $i(\partial D', \lambda) > 2\pi$ . Comme  $i(\partial D', \lambda') \leq 2(i(\partial D, \lambda') - \pi)$ , alors  $i(\partial D, \lambda') \geq \frac{i(\partial D', \lambda')}{2} + \pi > 2\pi$ .

Si l'intersection de  $\partial D$  et de  $\lambda^{(p)}$  est constituée de deux points  $x$  et  $y$ , alors on a  $i(\lambda', \partial D) = 2\pi + i(\lambda - \lambda^{(p)}, \partial D)$ . Il est donc suffisant de montrer que  $i(\lambda - \lambda^{(p)}, \partial D) > 0$ . Supposons le contraire, on a alors  $\lambda \cap \partial D = \{x, y\}$ . Si  $x$  et  $y$  sont contenus dans des feuilles distinctes  $c \subset |\lambda|$  et  $d \subset |\lambda|$ , notons  $\mathcal{V}$  un petit voisinage de  $c \cup d \cup D$  ;  $\mathcal{V}$  est un  $I$ -fibré sur un pantalon. L'adhérence de  $\partial \mathcal{V} - \partial M$  est un anneau proprement plongé  $a$  qui n'intersecte pas  $|\lambda|$ . De la condition b), on déduit que  $a$  est parallèle au bord. Il s'ensuit que  $M$  est un  $I$ -fibré sur un pantalon  $P$  et que  $|\lambda|$  est contenue dans une section du fibré au-dessus de  $\partial P$ . Pour toute composante  $\partial^i P$  de  $\partial P$ , il existe un disque essentiel  $\Delta \subset M = I \times P$  tel que  $(I \times \partial P) \cap \partial \Delta \subset I \times \partial^i P$ . Comme  $\lambda$  intersecte tous les disques essentiels (condition c)), on en déduit que  $|\lambda|$  est une section du fibré au-dessus de  $\partial P$ . Ceci contredit d), donc  $x$  et  $y$  appartiennent à la même feuille  $c$  de  $\lambda^{(p)}$ .

Soit  $\mathcal{V}$  un petit voisinage de  $c \cup D$  ; à nouveau, c'est un  $I$ -fibré sur un pantalon. Si les vecteurs tangents  $\frac{dc}{dt}|_x$  et  $\frac{dc}{dt}|_y$  ne pointent pas du même côté de  $\partial D$ , alors l'adhérence de  $\partial \mathcal{V} - \partial M$  est la réunion de deux anneaux  $a_1$  et  $a_2$  dont les bords n'intersectent pas  $\lambda$ . La condition b) entraîne que  $a_1$  et  $a_2$  sont parallèles au bord. Comme au paragraphe précédent, on en déduit que  $M$  est un  $I$ -fibré sur un pantalon  $P$  et que  $|\lambda|$  est une section du fibré au-dessus de  $\partial P$ .

Pour conclure, il nous reste à traiter le cas où  $\frac{dc}{dt}|_x$  et  $\frac{dc}{dt}|_y$  pointent du même côté de  $\partial D$ . Soit  $k$  une composante de  $c - \{x, y\}$  et  $\mathcal{V}'$  un petit voisinage de  $k \cup D$  ; l'adhérence de  $\partial \mathcal{V}' - \partial M$  est un disque essentiel  $D'$ . L'intersection de  $\partial D'$  et de  $c$  est constituée de deux points  $x'$  et  $y'$  et

les vecteurs tangents  $\frac{dc}{dt}|_{x'}$  et  $\frac{dc}{dt}|_{y'}$  ne pointent pas du même côté de  $\partial D'$ . Ceci nous ramène à la situation du cas précédent et nous conduit à la même conclusion.

Si l'intersection de  $\partial D$  et de  $\lambda^{(p)}$  est constitué de 3 points ou plus, alors on a  $i(\lambda', \partial D) \geq 3\pi$ .  $\square$

Remarquons qu'il découle de ce lemme que  $\mathcal{P}^+(M)$  est saturé en  $\mathcal{R}$ .

### 3.5 La continuité de $b_{\mathcal{R}}$

Dans cette section, nous allons utiliser les résultats obtenus précédemment pour montrer la continuité de  $b_{\mathcal{R}}$ . Étant données une courbe simple compacte  $c \in \partial_{\chi < 0} M$  et une métrique hyperbolique  $\sigma$  sur  $\text{int}(M)$ , on notera  $c^*$  la  $\sigma$ -géodésique dans la classe d'homotopie libre de  $c$  et  $l_{\sigma}(c^*)$  sa  $\sigma$ -longueur.

**Proposition 3.3.** *Soit  $(\sigma_n)$  une suite de métriques géométriquement finies sur l'intérieur de  $M$  qui converge vers une métrique géométriquement finie non-fuchsienne  $\sigma_{\infty}$ . Alors si  $\lambda_n$  est la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\sigma_n$ , la suite  $(\lambda_n)$  converge vers  $\lambda \in \mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$  et la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\sigma_{\infty}$  est le représentant  $\lambda'$  de  $\lambda$  qui appartient à  $\mathcal{P}(M)$ .*

*Démonstration.* Nous allons montrer que toute suite extraite de  $(\sigma_n)$  contient une sous-suite qui satisfait la conclusion de la proposition. Établissons tout d'abord un résultat qui concerne les courbes dont la longueur tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\lambda_n^{(p)}$  la réunion des feuilles de poids  $\pi$  de  $\lambda_n$ .

**Lemme 3.5.1.** *Soient  $(\sigma_n)$  une suite de métriques géométriquement finies sur l'intérieur de  $M$  qui converge algébriquement et  $(s_n)$  la suite des métriques sur  $\partial M$  induites par les homéomorphismes  $h_n : M - \lambda_n^{(p)} \rightarrow N(\sigma_n)$  associés aux  $\sigma_n$ . Alors  $\exists K > 0$  tel que pour toute courbe simple compacte  $c$  telle que  $c$  borde un disque essentiel,  $l_{s_n}(c) > K$ .*

*Démonstration.* Soient  $\gamma \subset \mathcal{P}(M)$  une multi-courbe pondérée et  $D \subset M$  un disque essentiel; nous allons montrer qu'au moins une feuille  $e$  de  $\gamma$  intersecte  $\partial D$  essentielllement, c'est-à-dire que les bouts de tout relevé de  $e$  à  $\tilde{M}$  sont séparés par un relevé de  $\partial D$ . Considérons un relevé  $\partial \tilde{D}$  de  $\partial D$  à  $\partial \tilde{M}$ ; ce relevé sépare  $\partial \tilde{M} \approx S^2$  en deux disques  $C$  et  $C'$ . Notons  $I_i, 1 \leq i \leq p$  (resp.  $I'_i, 1 \leq i \leq p'$ ) les arcs de  $p^{-1}(\gamma) - \partial \tilde{D}$  qui sont contenus dans  $C$  (resp.  $C'$ ) et dont les deux extrémités sont contenues dans  $\partial \tilde{D}$ ; les  $I_i$  (resp.  $I'_i$ ) séparent  $C$  (resp.  $C'$ ) en  $p+1$  disques  $C_i, 0 \leq i \leq p$  (resp. en  $p'+1$  disques  $C'_i, 0 \leq i \leq p'$ ). Les courbes  $\partial C_i$  et  $\partial C'_i \subset \partial \tilde{M}$  bordent des disques essentiels dans  $\tilde{M}$ . Les conditions a) et c) entraînent que pour tout  $i, \#\{\partial C_i \cap p^{-1}(\gamma)\} \geq 3$  et que  $\#\{\partial C'_i \cap p^{-1}(\gamma)\} \geq 3$ . Si aucune feuille de  $\gamma$  n'intersecte  $\partial D$  essentiellement, alors, pour tout  $i$ , chaque point de  $\partial C_i \cap \partial \tilde{D} \cap p^{-1}(\gamma)$  est l'extrémités d'un  $I_j$  et chaque point de  $\partial C'_i \cap \partial \tilde{D} \cap p^{-1}(\gamma)$  est l'extrémités d'un  $I'_j$ . Ceci entraîne que  $3(p+1) = 2p'$  et que  $3(p'+1) = 2p$ . On a alors  $p+p' = -6$  ce qui est impossible. Cette contradiction montre qu'au moins une feuille de  $\gamma$  intersecte  $\partial D$  essentiellement.

Soit  $(c_n)$  une suite de courbes simples compactes telles que  $c_n$  borde un disque essentiel et que  $l_{s_n}(c_n) \rightarrow 0$ . Pour  $n$  assez grand  $c_n$  est l'âme d'un tube de margouillis  $T_n \subset \partial M$ . Notons  $c_{1,n}$  et  $c_{2,n}$  les composantes de  $\partial T_n$  et choisissons  $T_n$  de façon que  $l_{s_n}(c_{1,n}) = l_{s_n}(c_{2,n}) \rightarrow 0$  et que  $d_{s_n}(c_{1,n}, c_n) = d_{s_n}(c_{2,n}, c_n) \rightarrow \infty$ . Soit  $\gamma \in \mathcal{P}(M)$  une multi-courbe pondérée; considérons une suite extraite telle qu'une feuille  $e$  de  $\gamma$  intersecte toutes les courbes  $c_n$  essentiellement. Pour chaque  $n$ , notons  $e_n^*$  la  $\sigma_n$ -géodésique qui est librement homotope à  $e$ ; soient  $\tilde{e}_n^*, \tilde{c}_n$  et  $\tilde{T}_n$  des relevés de  $e_n^*, c_n$  et  $T_n$ . Soient  $\Pi$  un plan totalement géodésique contenant  $\tilde{e}_n^*, \tilde{c}_{1,n}$  et  $\tilde{c}_{2,n}$  les composantes de  $\partial \tilde{T}_n$ ,  $\tilde{k}_n$  et  $\tilde{k}'_n$  les deux composantes connexes de  $\tilde{T}_n \cap \Pi$  et  $\tilde{\kappa}_n$  (resp.  $\tilde{\kappa}'_n$ ) l'arc

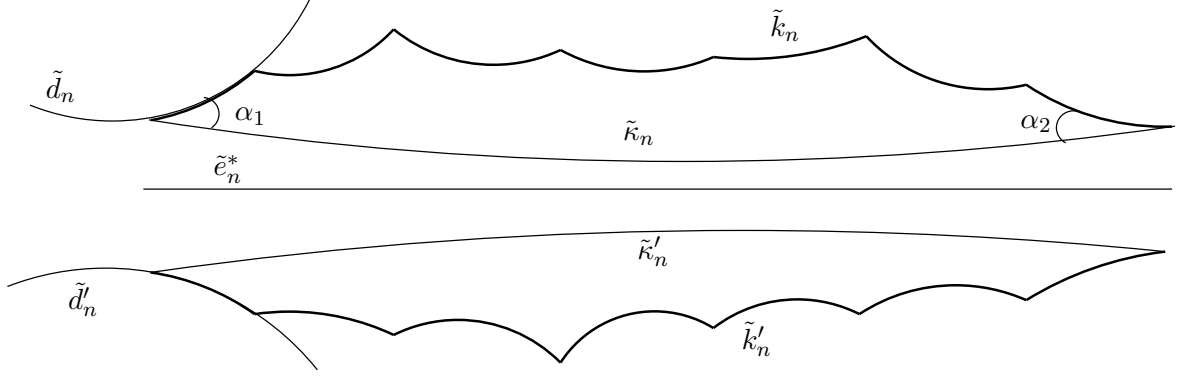


FIG. 3.1 – La section  $\Pi \cap C(\rho_n)$

géodésique de  $\Pi$  qui joint les extrémités de  $\tilde{k}_n$  (resp. de  $\tilde{k}'_n$ ), voir figure 3.1. Supposons que  $\partial\tilde{k}_n$  et  $\partial\tilde{k}'_n$  ne sont pas contenus dans l'image réciproque de  $\lambda_n$ , notons  $\tilde{d}_n$  et  $\tilde{d}'_n$  les intersections de  $\Pi$  avec les plans de support en  $\tilde{k}_n \cap \tilde{c}_{1,n}$  et en  $\tilde{k}'_n \cap \tilde{c}_{1,n}$ . Comme  $e_n^* \subset C(\rho_n)$ ,  $e_n^*$  n'intersecte pas  $\tilde{d}_n$  ni  $\tilde{d}'_n$ . Cette géodésique  $e_n^*$  n'intersecte pas non plus  $\tilde{k}_n$  ni  $\tilde{k}'_n$  donc elle n'intersecte pas  $\tilde{k}_n$  ni  $\tilde{k}'_n$ . Les extrémités de  $\kappa_n$  étant très proches de celles de  $\kappa'_n$ , ce qui précède entraîne que l'angle  $\alpha_1$  que font  $\tilde{d}_n$  et  $\tilde{k}_n$  est petit ; ceci est également vrai pour l'angle  $\alpha_2$  en l'autre sommet de  $\tilde{k}_n$ . Soit  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  un majorant de  $\alpha_1$  et de  $\alpha_2$  ; notons  $r_n = \max\{d(\tilde{x}, \tilde{k}_n)/x \in \tilde{k}_n\} \leq \max\{d(\tilde{x}, \tilde{e}_n^*)/\tilde{x} \in \tilde{k}_n\}$ . Tout point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{k}_n$  est contenu dans une courbe simple compacte  $\tilde{c}_{x,n} \subset \tilde{T}_n$  homotope à  $\tilde{c}_n$  telle que  $l_{s_n}(c_{x,n}) \leq l_{s_n}(c_{1,n})$ . Cette courbe  $\tilde{c}_{x,n}$  borde un disque de diamètre plus petit que  $l_{s_n}(c_{x,n})$  et qui intersecte  $\tilde{e}_n^*$ . On en déduit que  $r_n \leq l_{s_n}(c_{1,n}) \rightarrow 0$ . Un calcul utilisant les coordonnées de Fermi (voir la preuve de lemme A.1) donne  $l_{\sigma_n}(\tilde{k}_n) \leq \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} (\text{chr}_n)^2 l_{\sigma_n}(\tilde{k}_n)$ . Comme la largeur de  $T_n$  tend vers l'infini,  $l_{\sigma_n}(k_n) \rightarrow \infty$  donc  $l_{\sigma_n}(\kappa_n) \rightarrow \infty$ . Tout point de  $\kappa_n$  étant proche de la géodésique  $e_n^*$ , on en déduit que  $l_{\sigma_n}(e_n^*) \rightarrow \infty$ . Mais ceci contredit la convergence algébrique de  $(\sigma_n)$ .  $\square$

Poursuivons la preuve de la continuité de  $b_{\mathcal{R}}$ .

Comme  $(\sigma_n)$  converge vers  $\sigma_\infty$ , on peut choisir les représentations  $\rho_n : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  associées aux  $\sigma_n$  de façon que  $(\rho_n)$  converge algébriquement vers une représentation  $\rho_\infty$  associée à  $\sigma_\infty$  et que  $(\rho_n(\pi_1(M)))$  converge géométriquement vers  $\rho_\infty(\pi_1(M))$ . Pour  $n \in \bar{\mathbb{N}}$ , notons  $\lambda_n$  la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\sigma_n$  et  $\lambda_n^{(p)}$  la réunion des feuilles de  $\lambda_n$  dont le poids est  $\pi$ . Notons  $M_n = \mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$  et  $h_n : M - \lambda_n^{(p)} \rightarrow N(\rho_n)$  un homéomorphisme associé à  $\sigma_n$ .

Soit  $x_\infty \in \partial N(\rho_\infty)$  ; notons  $\partial_{x_\infty} N(\rho_\infty)$ , la composante connexe de  $\partial N(\rho_\infty)$  qui contient  $x_\infty$  et  $S$  la composante de  $\partial M - \lambda_\infty^{(p)}$  telle que  $h_\infty(S) = \partial_{x_\infty} N(\rho_\infty)$ . Soient  $\tilde{x}_\infty \in C(\rho_\infty)$  un relevé de  $h_\infty(x_\infty)$  et  $\partial_{\tilde{x}_\infty} C(\rho_\infty)$  la composante connexe de  $\partial C(\rho_\infty)$  qui contient  $\tilde{x}_\infty$ . D'après [Ta], l'enveloppe convexe  $C(\rho_\infty)$  de  $L_{\rho_\infty}$  est la limite pour la topologie de Hausdorff de  $(C(\rho_n))$ . Il existe donc  $\tilde{x}_n \subset \partial C(\rho_n)$  tel que  $(\tilde{x}_n)$  converge vers  $\tilde{x}_\infty$ . Notons  $\partial_{\tilde{x}_n} C(\rho_n)$  la composante connexe de  $\partial C(\rho_n)$  contenant  $\tilde{x}_n$  et  $\partial_{\tilde{x}_n} N(\rho_n)$  sa projection sur  $N(\rho_n)$  ; il existe une composante connexe  $S_n$  de  $\partial M - \lambda_n^{(p)}$  et une surface plissée  $g_n : S_n \rightarrow M_n$  dont l'image est  $\partial_{\tilde{x}_n} N(\rho_n)$ . Soit  $(\hat{g}_n, \Gamma_n, r_n)$  une surface plissée (abstraite) qui relève  $g_n$ , c'est-à-dire que l'application  $\hat{g}_n : \mathbb{H}^2 \rightarrow \partial_{\tilde{x}_n} C(\rho_n)$  est surjective, que l'image de  $r_n : \Gamma_n \rightarrow \rho_n(\pi_1(M))$  est le stabilisateur de  $\partial_{\tilde{x}_n} C(\rho_n)$  et que l'application quotient  $\mathbb{H}^2/\ker(r_n) \rightarrow \partial_{\tilde{x}_n} C(\rho_n)$  est un homéomorphisme. D'après [CEG, théorème 5.2.2] et le lemme 3.5.1 une suite extraite de la suite de surfaces plissées  $(\hat{g}_n, \Gamma_n, r_n)$  converge vers une surface plissée  $(\hat{g}_\infty, \Gamma_\infty, r_\infty)$ .

D'après le lemme 3.1.1,  $(\hat{g}_\infty, \Gamma_\infty, r_\infty)$  est une surface plissée convexe ou aplatie. Comme  $\tilde{x}_\infty \in \hat{g}_\infty(\mathbb{H}^2)$ , alors  $\hat{g}_\infty(\mathbb{H}^2) \subset \partial_{\tilde{x}_\infty} C(\rho_\infty)$  et  $r_\infty(\Gamma_\infty) \subset \rho_\infty(\pi_1(M))$  est un sous-groupe du

stabilisateur de  $\partial_{\hat{x}_\infty} C(\rho_\infty)$ .

**Lemme 3.5.2.** *L'application quotient  $g_\infty : \mathbb{H}^2/\Gamma_\infty \rightarrow \partial_{x_\infty} N(\rho_\infty)$  est un homéomorphisme.*

*Démonstration.* La suite  $(C(\rho_n))$  converge vers  $C(\rho_\infty)$  pour la topologie de Hausdorff (cf. [Ta]) et  $C(\rho_n) \subset C_{\hat{g}_n}$  pour tout  $n$ , donc  $C(\rho_\infty) \subset C_{\hat{g}_\infty}$ . On en déduit que  $\hat{g}_\infty(\mathbb{H}^2) = \partial_{\hat{x}_\infty} C(\rho_\infty)$ . Comme  $\rho_\infty$  n'est pas fuchsien,  $\text{int}(C_{\hat{g}_\infty}) \neq \emptyset$ , donc  $g_\infty$  et  $\hat{g}_\infty$  sont des revêtements.

Soit  $\hat{\gamma}_n \in \mathcal{ML}(\mathbb{H}^2)$  la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\hat{g}_n$ ; considérons une suite extraite telle que  $(|\hat{\gamma}_n|)$  converge géométriquement vers  $\hat{L}_\infty$ .

Supposons que  $g_\infty$  n'est pas un homéomorphisme; il existe  $z \neq y \in (\mathbb{H}^2 - \hat{L}_\infty)/\Gamma_\infty$  tels que  $g_\infty(z) = g_\infty(y)$ . On en déduit des relevés  $\hat{z}, \hat{y} \subset \mathbb{H}^2 - \hat{L}_\infty$  (de  $z$  et  $y$ ) et  $\rho_\infty(a) \in \rho_\infty(\pi_1(M))$  tels que  $\hat{z} \notin \Gamma_\infty \hat{y}$  et que  $\hat{g}_\infty(\hat{z}) = \rho_\infty(a) \circ \hat{g}_\infty(\hat{y})$ . Les suites  $\tilde{z}_n = \hat{g}_n(\hat{z})$  et  $\tilde{y}_n = \rho_n(a) \circ \hat{g}_n(\hat{y})$  convergent toutes deux vers  $\hat{g}_\infty(\hat{z})$ . Soient  $\Pi_{\tilde{z}_n}$  et  $\Pi_{\tilde{y}_n}$  des plan de supports de  $C(\rho_n)$  en  $\tilde{z}_n$  et en  $\tilde{y}_n$ ; alors  $(H_{\Pi_{\tilde{z}_n}}^+)$  et  $(H_{\Pi_{\tilde{y}_n}}^+)$  convergent vers des demi-espaces  $H_{\tilde{z}}^+ \supset C_{\hat{g}_\infty}$  et  $H_{\tilde{y}}^+ \supset C_{\rho_\infty(a) \circ \hat{g}_\infty}$  tous deux bordés par le plan de support  $\Pi_{\hat{g}_\infty(\hat{z})}$  en  $\hat{g}_\infty(\hat{z})$ . On a donc  $H_{\tilde{z}}^+ \cap H_{\tilde{y}}^+ = \Pi_{\hat{g}_\infty(\hat{z})}$  ou  $H_{\tilde{z}}^+ = H_{\tilde{y}}^+$ .

Comme  $C(\rho_\infty) \subset C_{\hat{g}_\infty} \cap C_{\rho_\infty(a) \circ \hat{g}_\infty} \subset H_{\tilde{z}}^+ \cap H_{\tilde{y}}^+$  et comme  $\rho_\infty(\pi_1(M))$  n'est pas fuchsien, alors  $H_{\tilde{z}}^+ \cap H_{\tilde{y}}^+ \neq \Pi_{\hat{g}_\infty(\hat{z})}$ , donc  $H_{\tilde{z}}^+ = H_{\tilde{y}}^+$ . Il s'en suit que si pour  $n$  assez grand  $\Pi_{\tilde{z}_n}$  et  $\Pi_{\tilde{y}_n}$  sont disjoints alors  $H_{\Pi_{\tilde{z}_n}}^+ \subsetneq H_{\Pi_{\tilde{y}_n}}^+$  ou  $H_{\Pi_{\tilde{y}_n}}^+ \subsetneq H_{\Pi_{\tilde{z}_n}}^+$ . Ceci contredit le fait que  $\tilde{y}_n \subset C(\rho_n) \subset H_{\Pi_{\tilde{z}_n}}^+$  et que  $\tilde{z}_n \subset C(\rho_n) \subset H_{\Pi_{\tilde{y}_n}}^+$ . On en déduit que, quitte à extraire une sous-suite,  $\Pi_{\tilde{z}_n}$  et  $\Pi_{\tilde{y}_n}$  s'intersectent. Ceci entraîne que pour  $n$  assez grand  $\hat{g}_n(\mathbb{H}^2)$  et  $\rho_n(a) \circ \hat{g}_n(\mathbb{H}^2)$  s'intersectent. On a alors  $\hat{g}_n(\mathbb{H}^2) = \rho_n(a) \circ \hat{g}_n(\mathbb{H}^2)$ . Comme  $H_{\Pi_{\tilde{y}_n}}^+ = H_{\Pi_{\tilde{z}_n}}^+$ , les angles dièdres  $\theta(\Pi_{\tilde{z}_n}, \Pi_{\tilde{y}_n})$  tendent vers 0. On en déduit que la distance entre  $\tilde{z}_n$  et  $\tilde{y}_n$  mesurée sur  $\hat{g}_n(\mathbb{H}^2)$  tend vers 0. Comme  $\hat{g}_\infty$  est un revêtement, il existe un voisinage  $\mathcal{V}(\hat{z}) \subset \mathbb{H}^2$  de  $\hat{z}$  tel que, pour  $n \in \overline{\mathbb{N}}$  assez grand, les applications  $\hat{g}_n|_{\mathcal{V}(\hat{z})} : \mathcal{V}(\hat{z}) \rightarrow \hat{g}_n(\mathcal{V}(\hat{z}))$  sont des homéomorphismes. Pour  $n$  assez grand,  $\tilde{y}_n \in \hat{g}_n(\mathcal{V}(\hat{z}))$ , donc  $\exists \hat{y}'_n \in \mathcal{V}(\hat{z})$  tel que  $\hat{g}_n(\hat{y}'_n) = \tilde{y}_n$ . Comme  $\hat{g}_n(\hat{y}'_n) = \rho_n(a) \circ \hat{g}_n(\hat{y})$  et comme  $r_n(\Gamma_n)$  est le stabilisateur de  $\hat{g}_n(\mathbb{H}^2)$  dans  $\rho_n(\pi_1(M))$ ,  $\exists a_n \in \Gamma_n$  tel que  $a_n \hat{y} = \hat{y}'_n$ . Comme  $\hat{y}'_n \subset \mathcal{V}(\hat{z})$ ,  $a_n$  déplace  $\hat{y}$  d'une distance bornée et il existe donc une sous-suite telle que  $(a_n)$  converge vers un élément  $a_\infty \in \Gamma_\infty$ . De plus  $\hat{g}_n(\hat{y}'_n)$  tend vers  $\hat{g}_\infty(\hat{z})$ , donc  $(\hat{y}'_n)$  tend vers  $\hat{z}$ . On a ainsi  $a_\infty \hat{y} = \hat{z}$ . Ceci contredit l'hypothèse  $\hat{z} \notin \Gamma_\infty \hat{y}$  et conclut la preuve du lemme 3.5.2.  $\square$

**Remarque.** Dans cette démonstration, la convergence géométrique de  $\rho_n(\pi_1(M))$  vers  $\rho_\infty(\pi_1(M))$  nous permet d'appliquer le résultat de Taylor et d'en déduire que  $\text{int}(C_{\hat{g}_\infty}) \neq \emptyset$ . C'est le seul moment où cette convergence géométrique est utilisée et on aurait donc pu se contenter des hypothèses suivantes :  $(\hat{g}_n, \Gamma_n, r_n)$  converge vers  $(\hat{g}_\infty, \Gamma_\infty, r_\infty)$  et  $\text{int}(C_{\hat{g}_\infty}) \neq \emptyset$ .  $\diamond$

On déduit de ce lemme que  $\mathbb{H}^2/\Gamma_\infty$  est homéomorphe à  $S$ . Soit  $F \subset S \subset \partial M$  une surface compacte telle que les composantes connexes de  $S - F$  sont des pointes de  $S$ . Comme  $\Gamma_n$  converge géométriquement vers  $\Gamma_\infty$ , d'après le lemme de Mumford (cf. [CEG]), il existe des applications  $f_n : F \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma_n$  qui ont les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \overline{\mathbb{N}}$ ,  $f_n$  est un homéomorphisme sur son image ;
- le bord de  $f_n(F) \subset \mathbb{H}^2/\Gamma_n$  est homotope à une multi-courbe dont la longueur tend vers 0 ;
- les représentations induites  $f_{n*} : \pi_1(F) \rightarrow \Gamma_n$  convergent algébriquement vers un isomorphisme  $f_{\infty*} : \pi_1(F) \rightarrow \Gamma_\infty$  ;
- les applications  $g_\infty \circ f_\infty$  et  $h_\infty$  coïncident sur  $F \subset \partial M$ .

Montrons que, pour  $n$  assez grand,  $g_n \circ f_n : F \rightarrow \partial N(\rho_n)$  est isotope à  $h_n$ . Soient  $\hat{F}$  le revêtement universel de  $F$  et  $\hat{f}_n : \hat{F} \rightarrow \mathbb{H}^2$  un relevé de  $f_n$ ; comme  $(f_{n*})$  converge algébriquement, on peut choisir les applications  $\hat{f}_n$  de manière qu'elles convergent vers  $\hat{f}_\infty$  sur tout compact. En outre  $(\hat{g}_n)$  converge vers  $\hat{g}_\infty$ , donc  $(\hat{g}_n \circ \hat{f}_n)$  converge vers  $\hat{g}_\infty \circ \hat{f}_\infty$  sur tout compact.

Soit  $x \in \text{int}(M)$ ; comme  $(\sigma_n)$  converge vers  $(\sigma_\infty)$ , il existe des difféomorphismes  $u_n : M \rightarrow M$



isotopes à l'identité qui satisfont la condition suivante : pour tout  $k > 1$  et  $r > 0$ , il existe  $n(k, r)$  tel que pour  $n \geq n(k, r)$ , la restriction de  $u_n$  à  $B(x, r) \subset (M, \sigma_\infty)$  est un difféomorphisme  $k$ -bilipschitz sur son image dans  $(M, \sigma_n)$ . Pour  $n \in \overline{\mathbb{N}}$ , notons  $x_n \in M_n$  l'image de l'origine  $o \in \mathbb{H}^3$ . Pour  $n \in \overline{\mathbb{N}}$ , la métrique  $\sigma_n$  fournit une identification de  $(\text{int}(M), \sigma_n)$  avec  $M_n$  telle que  $x$  est identifié avec  $x_n$ . On peut donc voir la restriction de  $u_n$  à  $\text{int}(M)$  comme un homéomorphisme  $u_n : M_\infty \rightarrow M_n$ .

Soit  $\tilde{u}_n : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  un relevé de  $u_n$  tel que  $\tilde{u}_n(o) = o$ . Les difféomorphismes  $\tilde{u}_n$  convergent sur tout compact vers un difféomorphisme 1-bilipschitz  $\tilde{u}_\infty : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  et nous allons montrer que  $\tilde{u}_\infty$  est l'identité. Comme  $\rho_\infty(\pi_1(M))$  n'est pas un groupe fuchsien, il existe  $a_1, a_2, a_3 \in \pi_1(M)$  tels que si  $V_{j,n}$  désigne le vecteur unitaire tangent en  $o$  à l'arc géodésique joignant  $o$  à  $\rho_n(a_j)(o)$ , alors  $(V_{1,\infty}, V_{2,\infty}, V_{3,\infty})$  est une base de l'espace tangent en  $o$ . Comme  $\rho_n(a_j)$  converge vers  $\rho_\infty(a_j)$ ,  $(V_{1,n}, V_{2,n}, V_{3,n}) = d\tilde{u}_n(V_{1,\infty}, V_{2,\infty}, V_{3,\infty})$  converge vers  $(V_{1,\infty}, V_{2,\infty}, V_{3,\infty})$ . On en déduit que la différentielle de  $\tilde{u}_\infty$  fixe  $(V_{1,\infty}, V_{2,\infty}, V_{3,\infty})$ . L'isométrie  $\tilde{u}_\infty$  fixe une base de  $T_o\mathbb{H}^3$ , c'est donc l'identité.

Comme  $(\hat{g}_n \circ \hat{f}_n)$  converge vers  $\hat{g}_\infty \circ \hat{f}_\infty$  sur tout compact, alors  $\tilde{u}_n^{-1} \circ \hat{g}_n \circ \hat{f}_n$  converge vers  $\hat{g}_\infty \circ \hat{f}_\infty$  sur tout compact. De plus,  $F$  a un domaine fondamental compact, donc  $u_n^{-1} \circ g_n \circ f_n : F \rightarrow M_\infty$  converge uniformément vers  $g_\infty \circ f_\infty$  (qui est identique à  $h_\infty$  sur  $F$ ). On en déduit que pour  $n$  assez grand,  $u_n^{-1} \circ g_n \circ f_n$  est isotope à  $h_\infty|_F$ . Il s'ensuit que  $g_n \circ f_n$  est isotope à  $u_n \circ h_\infty|_F$ . Notre identification de  $(\text{int}(M), \sigma_n)$  avec  $M_n$  fait de  $h_n$  une application isotope à l'identité pour tout  $n \in \overline{\mathbb{N}}$ . Comme  $u_n$  est également isotope à l'identité,  $u_n \circ h_\infty|_F$  est isotope à  $h_n$ . On peut donc changer  $f_n$  par une isotopie de façon que  $g_n \circ f_n$  coïncide avec  $h_n$  sur  $F$ .

Soient  $\hat{\gamma}_n$  la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\hat{g}_n$  et  $\gamma_n \in \mathcal{ML}(\mathbb{H}^2/\Gamma_n)$  sa projection; soient  $k \subset F$  un arc tel que  $f_\infty(k)$  est transverse à  $|\gamma_\infty|$  et  $\hat{k} \subset \hat{F}$  un relevé de  $k$ . Les arcs  $\hat{f}_n(\hat{k})$  convergent vers  $\hat{f}_\infty(\hat{k})$ . Comme les surfaces plissées convexes  $(\hat{g}_n, \Gamma_n, r_n)$  convergent vers  $(\hat{g}_\infty, \Gamma_\infty, r_\infty)$ , on déduit du lemme 3.1.3 que  $\int_{\hat{f}_n(\hat{k})} d\hat{\gamma}_n \rightarrow \int_{\hat{f}_\infty(\hat{k})} d\hat{\gamma}_\infty$ . Comme, pour tout  $n \in \overline{\mathbb{N}}$ ,  $g_n \circ f_n$  est identique à  $h_n$  sur  $F$ , on a  $\int_k d\lambda_n = \int_{f_n(k)} d\hat{\gamma}_n$  pour tout  $n \in \overline{\mathbb{N}}$  donc en prenant  $\lambda_\infty \in \mathcal{ML}(\partial M)$  telle que  $\int_{\hat{f}_\infty(\hat{k})} d\hat{\gamma}_\infty = \int_k d\lambda_\infty$ , on a  $\int_k d\lambda_n \rightarrow \int_k d\lambda_\infty$ .

Faisons cette construction de  $\lambda_\infty$  sur chaque composante  $S$  de  $\partial_{\chi < 0}M - \lambda_\infty^{(p)}$  et ajoutons à la lamination géodésique mesurée ainsi produite les feuilles de  $\lambda_\infty^{(p)}$  munies de mesure de Dirac de poids  $\pi$ . Comme  $h_\infty$  coïncide avec  $g_\infty \circ f_\infty$ , on obtient ainsi la lamination géodésique mesurée de plissage  $\lambda_\infty$  de  $\sigma_\infty$ . Du paragraphe précédent, on déduit que  $(\dot{\lambda}_n)$  converge dans  $\mathcal{ML}(\partial M)/\mathcal{R}$  et que la limite  $\dot{\lambda}$  diffère de  $\dot{\lambda}_\infty$  seulement sur  $\lambda_\infty^{(p)}$ , c'est-à-dire que  $|\dot{\lambda}| \subset |\lambda_\infty|$  et que si  $\lambda$  est un représentant de  $|\dot{\lambda}|$ , en enlevant de  $\lambda$  les feuilles contenues dans  $\lambda_\infty^{(p)}$  on obtient la même lamination géodésique mesurée qu'en enlevant  $\lambda_\infty^{(p)}$  de  $\lambda_\infty$ . Ainsi, si on montre que les feuilles de  $\lambda_\infty^{(p)}$  sont des feuilles de  $\lambda$  qui ont un poids supérieur à  $\pi$ , on peut conclure que  $\dot{\lambda}_n$  converge vers  $\dot{\lambda}_\infty$ .

**Affirmation 3.5.3.** *Soit  $\lambda$  un représentant de  $\dot{\lambda}$ ; toute feuille  $c$  de  $\lambda_\infty^{(p)}$  est une feuille de  $\lambda$  et a un poids supérieur à  $\pi$  (comme feuille de  $\lambda$ ).*

*Démonstration.* Soit  $c$  une feuille de  $|\lambda_\infty^{(p)}| \subset |\lambda_\infty|$ ; comme  $\dot{\lambda}_n$  converge vers  $\dot{\lambda}$  qui satisfait  $|\dot{\lambda}| \subset |\lambda_\infty|$ , alors ou bien  $c$  est une feuille de  $\lambda$  et nous noterons  $w(c)$  son poids, ou bien  $c$  est une courbe simple compacte disjointe de  $\lambda$  et nous prendrons  $w(c) = 0$ .

Nous allons démontrer cette affirmation en supposant que  $w(c) < \pi$  et en aboutissant à une contradiction.

Soit  $S$  une composante connexe de  $\partial M - \lambda_\infty^{(p)}$  dont l'adhérence contient  $c$ ; du fait que  $g_n \circ f_n$  converge vers  $g_\infty \circ f_\infty = h_\infty$  on déduit que  $l_{s_n}(c) \rightarrow 0$ .

Dans le cas où, quitte à extraire une sous-suite,  $i(c, \lambda_n) = 0$  pour tout  $n$ , alors d'après [BoO,

Lemme 19],  $c$  est une feuille de  $\lambda$  dont le poids vaut  $\pi$ .

Intéressons-nous à l'autre cas et choisissons une suite extraite telle que  $i(c, \lambda_n) > 0$  pour tout  $n$ . Soit  $\eta > 0$  un réel tel que  $\pi - \eta \leq w(c)$ . La courbe  $c$  est contenue dans le bord de deux surfaces fermées  $F^1$  et  $F^2 \subset \partial M$  (éventuellement confondues) qui satisfont les conditions suivantes :  $c \subset \text{int}(F^1 \cup F^2)$  et ou bien il existe une composante  $\lambda^1$  de  $\lambda$  telle que  $F^1 = \bar{S}(\lambda^1)$  ou bien  $F^1$  est un pantalon tel que  $\text{int}(F^1) \cap |\lambda| = \emptyset$  (et il en est de même pour  $F^2$ ). Nous allons seulement traiter le cas où  $F^1$  et  $F^2$  sont distinctes, l'autre cas se résoud avec les mêmes arguments.

Soient  $e_{j, \frac{\eta}{4}} \subset F^j$  une courbe simple telle que  $i(\lambda, e_{j, \frac{\eta}{4}}) \leq \frac{\eta}{4}$  et que  $e_{j, \frac{\eta}{4}}$  n'est pas librement homotope à  $c$  et  $k$  un arc simple joignant  $e_{1, \frac{\eta}{2}}$  à  $e_{2, \frac{\eta}{2}}$  intersectant  $c$  en un seul point et tel que  $\int_k d(\lambda - c) \leq \frac{\eta}{4}$ ; notons  $d$  la géodésique simple homotope à  $e_{1, \frac{\eta}{2}} * k * e_{2, \frac{\eta}{2}}^{-1} * k^{-1}$ . Cette géodésique  $d$  intersecte  $c$  en deux points et vérifie  $i(d, \lambda - c) \leq \eta$ ; on a donc  $i(d, \lambda) \leq 2\pi - \eta$ . Considérons un point  $x_n^1$  (respectivement  $x_n^2$ ) de  $d \cap F^1 - \lambda_n$  (respectivement  $d \cap F^2 - \lambda_n$ ) qui appartient à la partie épaisse de  $(F^1, s_n)$  (respectivement  $(F^2, s_n)$ ). Choisissons ces  $x_n^j$  de façon qu'en notant  $k_n^1$  et  $k_n^2$  les composantes connexes de  $d - \{x_n^1, x_n^2\}$  on ait  $\int_{k_n^j} d\lambda \rightarrow \frac{i(d, \lambda)}{2}$ . Soit  $y_n^j \subset k_n^j$  un point tel que si  $\kappa_n^j$  est le sous-arc de  $k_n^j$  reliant  $x_n^1$  et  $y_n^j$  (cf. figure 3.2), alors  $\int_{\kappa_n^j} d\lambda_n \rightarrow \frac{i(d, \lambda)}{4}$ . L'existence d'un tel point est garantie par le fait que dans un voisinage  $\mathcal{V}(c)$  de  $c$ ,  $\lambda_n \cap \mathcal{V}(c)$  est une famille d'arcs parallèles qui portent une petite mesure (puisque  $i(\lambda_n, c) \rightarrow 0$ , affirmation 3.3.2) et spiralent beaucoup le long de  $c$  (voir la preuve du lemme 4.3.2 pour plus de détails). Notons  $\kappa_n^3$  et  $\kappa_n^4$  les arcs qui joignent  $x_n^2$  à  $y_n^2$  et  $x_n^2$  à  $y_n^1$ . Maintenant, on a  $\int_{\kappa_n^j} d\lambda_n \rightarrow \frac{i(d, \lambda)}{4} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{4}$

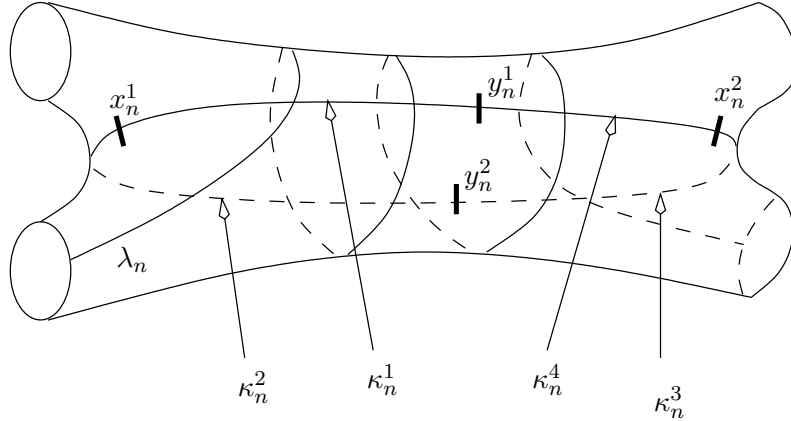


FIG. 3.2 – Découpage de  $c$

pour tout  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Pour  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , considérons un relevé  $\tilde{\kappa}_n^j \subset C(\rho_n) \subset \mathbb{H}^3$  de  $\kappa_n^j$  tel que  $\bigcup_j \tilde{\kappa}_n^j$  est connexe et notons  $\tilde{d}_n^j \subset \mathbb{H}^3$  l'arc géodésique qui joint les extrémités de  $\tilde{\kappa}_n^j$ .

S'il existe  $j_0$  tel que  $l_{s_n}(\kappa_n^{j_0})$  est borné alors  $\kappa_n^{j_0}$  est entièrement contenu dans la partie épaisse de  $(F^1 \cup F^2, s_n)$ . Comme  $f_n(F^1)$  et  $f_n(F^2)$  convergent vers des surfaces plissées dont les laminations géodésiques mesurées de plissage sont  $\lambda \cap F^j$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\kappa_n^{j_0}} d\lambda_n \leq i(d, \lambda - c) \leq \eta$ . En outre, on a  $\int_{\kappa_n^{j_0}} d\lambda_n \rightarrow \frac{i(c, \lambda)}{4}$ , donc  $i(c, \lambda) \leq 4\eta$ . Comme  $d$  intersecte  $c$  transversalement et comme  $l_{s_n}(c) \rightarrow 0$ ,  $l_{s_n}(d) \rightarrow \infty$ . En prenant  $\eta < \frac{\pi}{8}$ , on déduit du lemme d'approximation des courbes légèrement plissées (lemme A.1) que  $l_{\sigma_n}(d^*) \geq K_{4\eta}(l_{s_n}(d) + A_{4\eta})$ . Ainsi  $l_{\sigma_n}(d^*) \rightarrow \infty$ , ce qui contredit la convergence algébrique de  $\rho_n$ .

On a donc  $\forall j, l_{s_n}(\kappa_n^j) \rightarrow \infty$ . Le lemme d'approximations des segments légèrement plissés (lemme A.2) nous dit qu'il existe  $K > 0$  tel que  $l_{s_n}(\tilde{\kappa}_n^j) \leq Kl_{\sigma_n}(\tilde{d}_n^j)$  pour tout  $j$  et on déduit de la formule de Gauss-Bonnet (cf. lemme A.2) que l'angle entre deux arcs  $\tilde{d}_n^j$  qui ont un sommet commun est minoré par  $\frac{\eta}{2}$ . Soient  $a$  l'élément indivisible de  $r_n(\Gamma_n)$  qui laisse  $d^*$  invariant et

$\tilde{d}_n = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}; j=1,2,3,4} a^i(\kappa_n^j)$ ; la courbe  $\tilde{d}_n$  est la réunion de longs segments géodésiques qui, en leurs intersections, font des angles minorés par  $\frac{\eta}{2}$ . En appliquant un résultat classique (voir [Ot3] par exemple) on en déduit  $\exists K'$  tel que  $l_{\sigma_n}(\tilde{d}_n/a) \leq K' l_{\sigma_n}(d^*)$ . On obtient ainsi  $l_{s_n}(d) \leq K l_{\sigma_n}(\tilde{d}_n/a) \leq K K' l_{\sigma_n}(d^*)$ . Comme  $l_{s_n}(d) \rightarrow \infty$ , ce dernier résultat contredit la convergence algébrique de  $(\sigma_n)$ .  $\square$

On en conclut que la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\sigma_\infty$  est le représentant de  $\lambda$  contenu dans  $\mathcal{P}(M)$  et la proposition 3.3 est prouvée.  $\square$

# Interlude : Un bretzel n'a jamais étouffé le Petit Poucet.

Il était une fois ... mais vous connaissez certainement déjà l'histoire du Petit Poucet. Cette histoire commence de la même manière, sauf que Ptolémée (dont on sous-estime souvent l'importance dans les aventures du Petit Poucet) a fait preuve d'un peu de fantaisie en imaginant que la terre avait la forme d'un bretzel. Qui plus est, il avait raison car cette histoire se déroule sur un monde bretzeloïdal. Peu de scientifiques ont étudié l'influence de la rotondité de la Terre sur le comportement de ses habitants et ce conte éclairera peut-être sous un jour nouveau leur peu de théories.

Sur ce monde bretzeloïdal, les pauvres gens étaient écrasés par les exigences du patronat et l'indifférence de l'état. Parmi ceux-ci étaient le Petit Poucet, ses frères et leurs parents (curieusement, sur ce bretzel, les frères avaient coutume d'avoir les mêmes parents) qui vivaient dans la misère et l'indigence qui sont le lot du prolétariat. Les malheureux parents, pour épargner les affres de la faim à leurs enfants, décidèrent de les perdre dans la forêt, comptant sur les loups pour abrégier leurs souffrances. Sous prétexte d'aller fagotter, ils les emmenèrent au plus profond des bois. Là, ils attendirent que leurs rejetons ne les observent plus pour filer à l'anglaise. Ce Petit Poucet-là n'emportait jamais aucun cailloux (c'est lourd et ça déforme les poches). Néanmoins, suite à une discussion récente avec son ami l'ex-Petit Chaperon Rouge (et désormais Petit Kilt Rouge), il s'était mis à penser que la situation conjoncturelle des contes de fée était en pleine mutation. Pour cette raison, il s'était lancé dans l'étude de la géométrie riemannienne. Sachant que ses parents avaient pris le plus court chemin pour les emmener aussi loin et que ce chemin est nécessairement une géodésique, il avait pris la peine d'en retenir la direction. Ceci lui permit de retrouver l'itinéraire complet qui le mena, lui et ses frères jusqu'à leur maison. Les parents furent fort surpris mais néanmoins heureux de retrouver leur progéniture saine et sauve.

Ils étaient d'autant plus contents qu'un commis du roi leur avait tantôt apporté quelque argent. Hélas, cet argent fut bien vite mangé (ils avaient la dent dure) et les parents torturés durent à nouveau se résoudre à abrégier les souffrances de leur progéniture. Toute la famille retourna donc fagotter. Lorsque les parents eurent disparus, les enfants hurlèrent puis fondirent en larmes et enfin se tournèrent vers Poucet. Celui-ci pris sans hésiter le chemin du retour et mis quelque temps à découvrir les joies des systèmes dynamiques hyperboliques, à savoir qu'il s'était légèrement trompé au départ et qu'en conséquence ils étaient complètement perdus. La suite est semblable à celle du conte original, relisez cette œuvre superbe, je vous arrêterai au moment où ça change...

Stop, c'est là : les gamins se sont échappés, l'ogre s'est réveillé, a tué ses filles et maintenant il est très en colère. Il a chaussé ses bottes du difféomorphisme des sept lieues et à chaque pas qu'il fait, la métrique sur la planète bretzeloïdale est changée par un difféomorphisme, si bien que la longueur de ce pas est de sept lieues dans l'ancienne métrique. Par magie, ceci ne provoque jamais aucun tremblement de terre (ce sont de très vieille bottes datant de l'ère préthurstonienne). Ainsi il reprend rapidement du terrain sur les enfants. De plus, cet ogre (suite à des manipulations

génétiques inavouables presque autant qu'italiennes) est plus résistant que son homologue conté par Perrault et Poucet craint de se faire rattraper. Heureusement, le Petit Poucet est doté d'une extraordinaire intuition hyperbolique (que Darwin aurait sûrement pu expliquer s'il avait vécu sur un bretzel et à ce propos, je voudrais souligner qu'on mésestime souvent l'importance de Charles Darwin dans les aventures du Petit Poucet). Il se déplace dans une direction parfaitement choisie. Au pas suivant de l'Ogre, Poucet se retrouve derrière lui et lui pique ses bottes (encore un ogre victime de l'insécurité qui va voter Le Pen, dont on sous-estime souvent... pardon, je me suis laissé entraîner). Pour mieux comprendre comment le Petit Poucet a pu opérer ce déplacement décisif, le lecteur aura peut-être besoin d'un petit théorème. La fée Yetage va se faire un plaisir de vous le montrer dans les pages qui suivent.

## Chapitre 4

# Propriété de l'application de plissage

Dans ce chapitre, nous allons montrer la propriété de  $b_{\mathcal{R}}$  ce qui complètera la preuve des théorèmes B et C.

Soit  $(\sigma_n)$  une suite de métriques géométriquement finies sur l'intérieur de  $M$  ; notons  $\lambda_n$  la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\sigma_n$  et supposons que  $(\lambda_n)$  converge dans  $\mathcal{ML}(\partial M)/\mathcal{R}$  vers  $\lambda \in \mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$ . Nous allons montrer dans ce chapitre qu'une suite extraite de  $(\sigma_n)$  converge pour la topologie de  $\mathcal{GF}(M)$  vers une métrique  $\sigma_\infty \in \mathcal{GF}(M)$  dont la lamination géodésique mesurée de plissage est le représentant  $\lambda'$  de  $\lambda$  contenu dans  $\mathcal{P}(M)$ .

La preuve de ce résultat suit le plan de [BoO]. Nous allons tout d'abord établir un lemme qui porte sur les longueurs  $l_{\sigma_n}(\lambda_n)$  des lieux de plissages  $\lambda_n$ .

### 4.1 La longueur du lieu de plissage

**Lemme 4.1.1.** *Soient  $M$  une variété compacte hyperbolique de dimension 3 et  $\lambda \in \mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$  une classe de laminations géodésiques mesurées ; supposons qu'il existe une suite de multi-courbes pondérées  $\lambda_n$  telles que :*

- pour tout  $n$ ,  $\lambda_n$  est la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie  $\sigma_n$  ;
- les classes de laminations géodésiques mesurées  $\lambda_n$  convergent vers  $\lambda$  dans  $\mathcal{ML}(\partial M)/\mathcal{R}$ .

Alors les longueurs  $l_{\sigma_n}(\lambda_n)$  sont majorées.

*Démonstration.* Supposons que ce n'est pas le cas ; d'après [BoO] il existe une suite de disques essentiels  $D_n$  tels que  $i(\partial D_n, \lambda_n) \rightarrow 2\pi$ . Considérons une suite extraite telle que  $\partial D_n$  et  $|\lambda_n|$  convergent géométriquement vers des laminations géodésiques  $N$  et  $L$ . D'après le critère de Casson (Théorème 1.1),  $N$  contient une feuille homoclinique  $d$  (éventuellement compacte). Montrons que  $i(d, \lambda') \leq 2\pi$ , la condition  $c_1$ ) nous fournira la contradiction espérée. Soit  $k$  un arc de  $d$  tel que  $\partial k \cap L = \emptyset$  ; pour  $n$  assez grand,  $\partial k \in \partial M - \lambda_n$  et  $D_n$  contient un arc  $k_n$  proche de  $k$ , tel que tout point de  $\partial k_n$  appartient à la même composante connexe de  $\partial M - \lambda_n$  que le point correspondant de  $\partial k$ . On a alors  $i(k, \lambda_n) = i(k_n, \lambda_n) \leq i(\partial D_n, \lambda_n)$ . D'après l'affirmation 3.3.1,  $\int_k d\lambda' \leq \liminf \int_{k_n} d\lambda_n \leq \lim i(\partial D_n, \lambda_n) \leq 2\pi$ . En considérant une suite de tels arcs  $k$  qui tend vers  $d$ , on conclut que  $\int_d d\lambda' \leq 2\pi$ . Ceci contredit le fait que  $\lambda' \subset \mathcal{P}(M)$  (condition  $c_1$ ).  $\square$

Nous allons construire la métrique  $\sigma_\infty$  comme valeur d'adhérence de la suite  $(\sigma_n)$ . La proposition suivante va nous permettre de montrer que la suite  $(\sigma_n)$  a au moins une valeur d'adhérence pour la topologie algébrique (nous verrons plus tard que cette valeur d'adhérence correspond à une métrique sur l'intérieur de  $M$ ) :

**Proposition 4.1.** *Soient  $M$  une variété compacte hyperbolique de dimension 3 et  $\dot{\lambda} \in \mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$  une classes de laminations géodésiques mesurées ; supposons qu'il existe une suite de multi-courbes pondérées  $\lambda_n$  telles que :*

- pour tout  $n$ ,  $\lambda_n$  est la lamination géodésique mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie  $\sigma_n$  ;
- les classes de laminations géodésiques mesurées  $\dot{\lambda}_n$  convergent vers  $\dot{\lambda}$ .

*Alors quitte à extraire, la suite  $\sigma_n$  converge algébriquement.*

*Démonstration.* Nous allons montrer la proposition 4.1 par l'absurde. Supposons qu'aucune suite extraite de  $(\sigma_n)$  ne converge algébriquement ; d'après la théorie développée par Culler, Morgan et Shalen (cf. [MoS1]), quitte à extraire,  $\sigma_n$  tend vers une action minimale à petits stabilisateurs d'arêtes de  $\pi_1(M)$  sur un arbre réel  $\mathcal{A}$ . Cette action a la propriété suivante : si  $c$  est un élément de  $\pi_1(M)$  qui ne fixe aucun point de  $\mathcal{A}$  et  $c^* \subset M$  est la géodésique pour la métrique  $\sigma_n$  qui représente  $c$ , alors la suite  $(l_{\sigma_n}(c^*))$  n'est pas majorée.

La section suivante va nous en dire un peu plus sur les relations entre une telle action et  $\dot{\lambda} \in \mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$ .

## 4.2 Réalisation de laminations géodésiques dans un arbre réel

Dans cette section, nous allons traiter de réalisations de laminations géodésiques dans un arbre réel sur lequel  $\pi_1(M)$  agit minimalement.

**Définition.** Soit  $\pi_1(M) \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  une action minimale à petits stabilisateurs d'arêtes de  $\pi_1(M)$  sur un arbre réel  $\mathcal{A}$  ; une lamination géodésique  $L \in \mathcal{L}(\partial M)$  est réalisée dans  $\mathcal{A}$  s'il existe une application  $\pi_1(M)$ -équivariante de  $L$  dans  $\mathcal{A}$  dont la restriction à chaque feuille de  $L$  est injective.

Nous allons tout d'abord montrer le résultat suivant puis nous en donnerons un version un peu plus générale qui nous permettra de montrer la proposition 4.1.

**Proposition 4.2.** *Soit  $\mathcal{A}$  un arbre réel,  $\pi_1(M) \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  une action minimale à petits stabilisateurs d'arêtes et  $\lambda \in \mathcal{P}(M)$  une lamination géodésique mesurée ; alors au moins une composante connexe de  $\lambda$  est réalisée dans  $\mathcal{A}$ .*

*Démonstration.* Soit  $S$  une composante de  $\partial M$  ; l'inclusion  $i_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$  nous fournit une action de  $\pi_1(S)$  sur  $\mathcal{A}$ . D'après [MoO], on peut construire une lamination géodésique mesurée  $\beta$ , telle qu'il existe un morphisme  $\Phi : \mathcal{A}_\beta \rightarrow \mathcal{A}_S$  de l'arbre dual de  $\beta$  dans le sous-arbre minimal de  $\mathcal{A}$  invariant par l'action de  $\pi_1(S)$ . Par construction, les points de branchement de ce morphisme sont les projections de composantes connexes de  $S - \beta$ . Comme l'action de  $\pi_1(S)$  sur  $\mathcal{A}_S$  n'est pas à petits stabilisateurs d'arêtes,  $\Phi$  n'est pas, a priori, un isomorphisme et il existe plusieurs laminations  $\beta$  ayant cette propriété. Nous allons construire une telle lamination  $\beta$  qui sera adaptée à notre problème.

Soit  $(\lambda_n)$  une suite de multi-courbes pondérées qui converge vers  $\lambda$  dans  $\mathcal{ML}(M)$  et telle que  $(|\lambda_n|)$  converge géométriquement vers  $|\lambda|$ . Pour chaque minimal exceptionnel  $\lambda^i$  de  $\lambda$ , notons  $S(\lambda^i)$  la surface embrassée par  $\lambda^i$ . Soit  $L$  la réunion des feuilles compactes de  $\lambda$  et des composantes des bords effectifs  $\partial S(\lambda^i)$  des surfaces embrassées par les minimaux exceptionnels  $\lambda^i$  de  $\lambda \cap \partial M$ . Pour  $n$  assez grand pour que  $|\lambda_n|$  n'intersecte pas  $L$  transversalement, étendons  $|\lambda_n| \cup L$  en une multi-courbe  $L_n$  dont les composantes du complémentaire sont des pantalons. D'après Morgan et Otal ([MoO]), pour chaque composante  $S$  de  $\partial M$ , il existe une lamination géodésique mesurée  $\beta_n \subset \mathcal{ML}(S)$  et un morphisme équivariant  $\Phi_n$  de l'arbre réel  $\mathcal{A}_{\beta_n}$  dual de  $\beta_n$  dans  $\mathcal{A}$

tel que pour toute composante  $l_n$  de  $L_n$ , la restriction de  $\Phi_n$  à l'axe de  $l_n$  est une isométrie. Rappelons brièvement comment une telle lamination  $\beta_n$  est construite dans [MoO]. Considérons une triangulation  $T$  de  $S$  dont le 0-squelette est contenu dans  $L_n$  et dont le 1-squelette contient  $L_n$ . On construit une application équivariante  $\phi_n$  du revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de  $S$  dans  $\mathcal{A}$  de la façon suivante : soit  $\hat{\mathcal{S}}^0 \subset \mathbb{H}^2$  un relevé du 0-squelette de  $T$  ; chaque point  $\hat{x}$  de  $\hat{\mathcal{S}}^0$  est contenu dans une composante  $\hat{l}_n$  de la préimage de  $L_n \cap S$  dans  $\mathbb{H}^2$ . On choisit pour  $\phi_n(\hat{x}) \in \mathcal{A}$  ou bien un point de l'axe de  $i_*(l_n)$  ou bien un point fixe de  $i_*(l_n)$ . On définit ensuite  $\phi_n$  sur toute la préimage de  $\mathcal{S}^0$  par équivariance puis on la prolonge sur le 1-squelette et enfin sur le 2-squelette en une application  $\phi_n$  équivariante, transverse à une lamination mesurée  $\beta_n$ . Cette application  $\phi_n$  fournit une application  $\Phi_n$  de l'arbre  $\mathcal{A}_{\beta_n}$  dual de  $\beta_n$  dans  $\mathcal{A}$ . Avec cette construction, si  $\delta_{\mathcal{A}}(l_n) > 0$ , alors la restriction de  $\Phi_n$  à l'axe de  $l_n$  est une isométrie et son image est l'axe de  $i_*(l_n)$  dans  $\mathcal{A}$ , tandis que si  $\delta_{\mathcal{A}}(l_n) = 0$ ,  $i(l_n, \beta_n) = 0$ . Soit  $\lambda^i$  un minimal exceptionnel de  $\lambda$  tel que  $i_*(\pi_1(S(\lambda^i)))$  a un point fixe global  $X$  dans  $\mathcal{A}$  ; dans la construction de  $\phi_n$  prenons  $\phi_n(\hat{x}) = X$  pour tout  $\hat{x}$  dans le relevé de  $S(\lambda^i)$  qui intersecte  $\hat{\mathcal{S}}^0$ . On construit ainsi une lamination  $\beta_n$  telle que si  $i_*(\pi_1(S(\lambda^i)))$  a un point fixe global dans  $\mathcal{A}$ , alors  $\beta_n \cap S(\lambda^i) = \emptyset$  (i.e.  $\beta_n \cap \bar{S}(\lambda^i) \subset \partial' \bar{S}(\lambda^i)$ ). Faisons la même construction pour chaque composante de  $\partial M$  et notons encore  $\beta_n \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  la lamination géodésique mesurée obtenue. Quitte à extraire, on peut supposer que la suite  $(|\beta_n|)$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $B$ .

Nous allons tout d'abord montrer que  $B$  intersecte  $|\lambda|$  transversalement. Ceci nous permettra d'utiliser comme dans [KIS] un argument de réalisation de réseaux ferroviaires pour montrer qu'au moins une composante de  $\lambda$  est réalisée dans  $\mathcal{A}$ .

**Lemme 4.2.1.** *La lamination géodésique  $B$  intersecte  $|\lambda|$  transversalement.*

*Démonstration.* Nous l'allons démontrer par l'absurde. Supposons donc que  $|\lambda|$  n'intersecte pas  $B$  transversalement.

Si  $B$  est une multi-courbe, alors, pour  $n$  assez grand,  $|\beta_n| = B$  et  $\beta_n$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement. Il découle alors des conditions b) et c) qu'un voisinage annulaire de  $\beta_n$  ne contient ni disques, ni anneaux, ni rubans de Möbius essentiels. D'après [MoS2, corollaire IV 1.3], ceci entraîne que l'action de  $\pi_1(M)$  laisse un point de  $\mathcal{A}$  invariant et a fortiori que  $\mathcal{A}$  n'est pas minimal.

Considérons ensuite le cas où  $B$  n'est pas une multi-courbe. Avant d'établir que  $B$  est annulaire, nous allons montrer que pour chaque composante connexe  $B^i$  de  $B$  qui n'est pas une courbe simple,  $S(B^i)$  est incompressible et en déduire que la suite  $(\beta_n)$  est constante.

**Affirmation 4.2.2.** *Soit  $B^i$  une composante de  $B$  qui n'est pas une courbe simple ; alors  $S(B^i)$  est incompressible.*

*Démonstration.* Supposons que  $B$  possède une composante  $B^i$  qui n'est pas une courbe simple et pour laquelle  $S(B^i)$  est compressible. D'après le lemme 2.2.2,  $S(B^i)$  contient une multi-courbe  $C$  par rapport à laquelle  $B^i$  est en position prétendue et telle que  $C$  contient un système  $C_0$  de méridiens admissible pour  $(M, S(B^j))$ . Du fait que la suite de laminations géodésiques  $(|\beta_n| \cap S(B^i))$  converge géométriquement vers  $B^i$ , on déduit que pour  $n$  suffisamment grand  $\beta_n \cap S(B^i)$  est en position prétendue par rapport à  $C$ . D'après l'affirmation 1.5.4,  $\beta_n$  ne contient pas d'arcs de compression vers  $C_0$ . Ceci nous permet d'utiliser le résultat suivant, dû à G. Kleidam et J. Souto ([KIS]) :

**Proposition 4.3 ([KIS]).** *Soit  $S \subset \partial M$  une surface compressible,  $\beta \subset \mathcal{ML}(S)$  une lamination géodésique mesurée telle qu'il existe un morphisme équivariant  $f : \mathcal{A}_{\beta} \rightarrow \mathcal{A}$ . Soit  $m \subset S$  un méridien tel que  $m$  intersecte  $\beta$  transversalement et que  $\beta$  ne contient pas d'arcs de compression vers  $m$  ; alors il existe une suite de méridiens  $(m_p) \subset S$  qui converge géométriquement vers une lamination  $N$  qui n'intersecte pas  $|\beta|$  transversalement.*



*Démonstration.* D'après [KLS], si  $\beta$  satisfait les hypothèses de cette proposition, alors il existe une feuille homoclinique  $l \subset S$  telle que  $l \cup \beta$  est une lamination géodésique. Notons  $\beta' \subset \beta$  la réunion des minimaux de  $\bar{l}$ ; d'après la construction de [KLS],  $\beta'$  est en position prétendue par rapport à  $m$ . Toujours d'après [KLS] ceci entraîne qu'il existe une suite  $(m_p)$  de méridiens de  $S$  qui vérifie :

- $(m_p)$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $N$  qui n'intersecte pas  $l$  transversalement ;
- pour tout voisinage  $\mathcal{V}(l)$  de  $l$ , il existe  $p_0$  tel que pour  $p \geq p_0$ ,  $m_p$  peut être homotopé dans  $\mathcal{V}(l)$ .

De cette dernière propriété on déduit que  $N \subset S(\bar{l})$  et la première propriété nous permet de conclure que  $N$  n'intersecte pas  $\beta$  transversalement.  $\square$

En appliquant cette proposition à chacune des laminations  $\beta_n \cap S(B^i)$ , on obtient par une extraction diagonale une suite de méridiens contenus dans  $S(B^i)$  qui converge géométriquement vers une lamination géodésique  $N'$  qui n'intersecte pas  $B^i$  transversalement. Comme  $\lambda$  n'intersecte pas  $B^i$  transversalement, alors  $\lambda \cap S(B^i) \subset B^i$  et  $N'$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement. D'après le critère de Casson,  $N'$  contient une feuille homoclinique, ce qui contredit le lemme 2.2.3.  $\square$

Déduisons-en que le support de  $\beta_n$  est indépendant de  $n$ . Soit  $B^i$  une composante connexe de  $B$ ; si  $B^i$  est une feuille compacte, alors pour tout  $n$ ,  $B^i \subset |\beta_n|$ . Supposons donc que  $B^i$  n'est pas une feuille compacte. D'après ce qui précède,  $S(B^i)$  est incompressible; l'action de  $i_*(\pi_1(S(B^i)))$  sur son sous-arbre invariant minimal  $\mathcal{A}_{S(\beta^i)} \subset \mathcal{A}$  est donc à petits stabilisateurs d'arêtes. Comme  $B$  n'intersecte pas  $\partial' \bar{S}(B^j)$ , alors, pour  $n$  assez grand,  $|\beta_n|$  n'intersecte pas  $\partial' \bar{S}(B^i)$ . On en déduit d'une part que  $\beta_n^i = \beta_n \cap S(B^i)$  est une lamination géodésique mesurée et d'autre part que, pour chaque composante de  $\partial' \bar{S}(B^i)$ , l'action de l'élément correspondant de  $\pi_1(\partial M)$  a un point fixe dans  $\mathcal{A}_{S(B^i)}$ . On peut donc appliquer le théorème de Skora [Sk] d'après lequel la lamination géodésique mesurée  $\beta_n^i$  est duale de l'action de  $\pi_1(S(B^i))$  sur  $\mathcal{A}_{S(B^i)}$ . En faisant ce raisonnement pour chaque composante connexe de  $B$ , on en déduit que la suite  $(|\beta_n|)$  est constante. La lamination géodésique  $B$  est le support d'une lamination géodésique mesurée  $\beta_n$  de cette suite; munissons  $B$  de la mesure de  $\beta_n$  et notons  $\beta$  la lamination géodésique mesurée obtenue.

Notre hypothèse de départ est que  $B = |\beta|$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement, d'après la condition  $b_1$ ) ceci entraîne que  $\beta$  n'est pas annulaire. L'affirmation suivante va nous fournir la contradiction qui conclut la preuve du lemme 4.2.1

**Affirmation 4.2.3.** *La lamination géodésique  $\beta$  est annulaire.*

*Démonstration.* Supposons que  $S(\beta)$  contient une courbe parabolique  $d$ . Par hypothèse,  $\beta$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement donc, d'après la condition  $b_1$ ),  $d$  n'est pas contenue dans  $\beta$ . On en déduit que  $d$  est contenue dans la surface embrassée par un minimal exceptionnel  $\beta^j$  de  $\beta$ . Comme  $\rho_n(i_*(d))$  est parabolique pour tout  $n$ , l'action de  $i_*(d)$  a un point fixe dans  $\mathcal{A}_{S(\beta^j)}$ , donc  $\beta^j$  n'intersecte pas  $d$ . De l'affirmation 1.3.3 on déduit que  $d \subset \partial' \bar{S}(\beta^j)$ . On obtient alors une contradiction entre la condition  $b_1$ ) et l'hypothèse que  $\lambda$  et  $\beta$  ne s'intersectent pas transversalement. La surface  $S(\beta)$  ne contient donc pas de courbes paraboliques.

Comme  $S(\beta)$  est incompressible et ne contient pas de courbes paraboliques, on peut considérer une sous-variété caractéristique  $W$  relative à  $S(\beta)$  (voir section 2.1). Pour chaque composante  $\Sigma$  de  $\partial M - S(\beta)$ ,  $i_*(\pi_1(\Sigma))$  a un point fixe dans  $\mathcal{A}$ , donc, d'après [Th5] (voir aussi [MoS2, théorème IV 1.2]), on peut isotoper  $W$  de manière que le support de  $\beta$  soit contenu dans  $W \cap \partial M$ . Nous allons maintenant utiliser, comme dans [BoO], la structure de  $W$ . Nous sommes dans le

cas où  $\beta$  n'est pas une multi-courbe pondérée donc  $\beta$  contient un minimal exceptionnel  $\beta^1$ . Le support  $|\beta^1|$  de ce minimal est contenu dans le bord d'un  $I$ -fibré  $W^1 \subset W$ . Soit  $F^1$  la surface de base du fibré  $W^1$  et  $q : \partial W^1 \rightarrow F^1$  la projection le long des fibres. D'après le théorème de Skora, pour chaque composante  $\Sigma$  de  $W^1 \cap \partial M$ ,  $\Sigma \cap \beta$  est la lamination duale de l'action de  $\pi_1(\Sigma)$  sur son sous-arbre invariant minimal dans  $\mathcal{A}$ . Comme cette action se factorise par l'action de  $\pi_1(W^1) = \pi_1(F^1)$ , il existe une lamination géodésique mesurée  $\beta' \in \mathcal{ML}(F^1)$  telle que  $\beta \cap W^1 \supset q^{-1}(\beta')$ . Ceci prouve que  $\beta$  est annulaire.  $\square$

Ceci conclut la preuve du lemme 4.2.1  $\square$

Poursuivons la preuve de la proposition 4.2. Soit  $\lambda^i$  une composante connexe de  $\lambda$  qui intersecte  $B$  transversalement. En suivant la construction de [Ot3, chapitre 3], on obtient un réseau ferroviaire  $\tau^i$  qui possède les propriétés suivantes :

- $\tau^i$  porte  $\lambda^i$ ;
- $B$  est transverse aux rails de  $\tau^i$ ;
- chaque branche de  $\tau^i$  intersecte  $B$ ;
- notons  $\hat{\tau}$  la préimage de  $\tau$  dans le revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de la composante connexe de  $\partial M$  qui contient  $\tau$ ; si  $\hat{b}_1$  et  $\hat{b}_2$  sont des branches adjacentes alors  $\hat{b}_1$  et  $\hat{b}_2$  intersectent des feuilles différentes de la préimage de  $B$ .

Comme  $(\beta_n)$  converge géométriquement vers  $B$  alors, pour  $n$  assez grand,  $\tau^i$  satisfait les mêmes propriétés en remplaçant  $B$  par  $\beta_n$ . Notons  $\pi_{\beta_n} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{A}_{\beta_n}$  la projection définie dans la section 1.1; d'après les conditions satisfaites par  $\tau^i$ ,  $\pi_{\beta_n}$  est une réalisation faible de  $\tau^i$  dans  $\mathcal{A}_{\beta_n}$  c'est-à-dire que  $\pi_{\beta_n}$  est constante sur les traverses de  $\tau^i$ , monotone et non constante sur ses rails, et que les images de deux branches adjacentes ont des intérieurs disjoints.

Soit  $l_n$  une composante de  $L_n \cap S(\lambda^i)$ ; montrons que pour  $n$  assez grand,  $i_*(l_n)$  n'a pas de point fixe dans  $\mathcal{A}$ . Sinon, quitte à extraire,  $i_*(l_n)$  a un point fixe dans  $\mathcal{A}$  et, par construction,  $\beta_n$  n'intersecte pas  $l_n$  transversalement. Quitte à extraire,  $l_n$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $L' \subset S(\lambda^i)$  qui n'intersecte pas  $B$  transversalement. Par construction,  $i(L_n, \lambda_n) = 0$  donc  $L'$  n'intersecte pas  $|\lambda^i|$  transversalement d'où  $L' \supset |\lambda^i|$ . Le fait que  $L'$  n'intersecte pas  $B$  transversalement contredit notre choix de  $\lambda^i$  qui intersecte  $B$  transversalement.

On en déduit que la restriction de  $\Phi_n$  à l'axe de  $l_n$  est une isométrie. Pour  $n$  assez grand, chaque rectangle de  $\hat{\tau}$  contient un arc d'un relevé de  $l_n$ . Du fait que la restriction de  $\Phi_n$  à l'axe de  $l_n$  est une isométrie, il découle alors que  $\Phi_n \circ \pi_{\beta_n}$  est une réalisation faible de  $\tau^i$  dans  $\mathcal{A}$  (cf. [KIS]). D'après [Ot3] cette application  $\Phi_n \circ \pi_{\beta_n}$  peut être homotopée en une réalisation de  $\lambda^i$  dans  $\mathcal{A}$  ce qui permet de conclure la preuve de la proposition 4.2.  $\square$

Nous aurons besoin d'une version un peu plus générale de la proposition 4.2. Cette généralisation s'applique aux laminations qui sont reliées aux laminations géodésiques mesurées de  $\mathcal{P}^+(M)$  de la manière suivante :

**Définition.** Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée; une lamination géodésique  $E$  est appelée une expansion de  $\lambda$  si  $|\lambda| \subset E$  et si  $E - |\lambda|$  est la réunion d'un nombre fini de feuilles non-récurrentes, chacune de ces feuilles non-récurrentes spiralant des deux côtés autour d'un même minimal exceptionnel de  $|\lambda|$ .

La preuve de la proposition 4.2 peut être étendue aux laminations géodésiques qui sont des expansions de laminations géodésiques mesurées appartenant à  $\mathcal{P}^+(M)$ .

**Corollaire 4.2.4 (de la preuve de la proposition 4.2).** Soient  $\lambda \subset \mathcal{P}^+(M)$  et  $E$  une expansion de  $|\lambda|$ . Soit  $\pi_1(M) \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  une action minimale à petits stabilisateurs d'arêtes de  $\pi_1(M)$  sur un arbre réel  $\mathcal{A}$ ; alors au moins une composante de  $E$  est réalisée dans  $\mathcal{A}$ .

*Démonstration.* Soit  $(E_n)$  une suite de multi-courbes qui converge géométriquement vers  $E$ ; construisons des laminations géodésiques mesurées  $\beta_n$  de la même manière que dans la preuve de la proposition 4.2 mais en utilisant cette multi-courbe  $E_n$  au lieu de  $L_n$ . On a alors un morphisme équivariant  $\Phi_n : \mathcal{A}_{\beta_n} \rightarrow \mathcal{A}$  tel que pour toute feuille  $e_n$  de  $E_n$ , ou bien  $\delta_{\mathcal{A}}(e_n) = 0$  ou bien la restriction de  $\Phi_n$  à l'axe de  $e_n$  est une isométrie et que pour toute composante connexe  $E^i$  de  $E$ , si  $i_*(\pi_1(S(E^i)))$  a un point fixe global  $\mathcal{A}$ , alors  $\beta_n \cap S(\lambda^i) = \emptyset$

Notons  $B$  la limite d'une suite extraite de  $(|\beta_n|)$  qui converge géométriquement; d'après la preuve de la proposition 4.2,  $B$  intersecte  $\lambda$  transversalement. Comme  $|\lambda| \subset E$ ,  $B$  intersecte aussi  $E$  transversalement. Soit  $E^i$  une composante connexe de  $E$  qui intersecte  $B$  transversalement. Si  $E^i$  est une feuille compacte, la preuve se conclut de la même façon que la preuve de la proposition 4.2 et  $E^i$  est réalisée dans  $\mathcal{A}$ . Dans le cas contraire,  $E^i$  est la réunion d'un minimal exceptionnel  $|\lambda^i|$  et d'un nombre fini de feuilles non-récurrentes qui spiralent des deux côtés autour de  $|\lambda^i|$ . La construction de [Ot3] peut-être utilisée aussi dans ce cas, elle fournit un réseau ferroviaire  $\tau^i$  qui porte  $E^i$  et tel que  $\pi_{\beta_n}$  est une réalisation faible de  $\tau$  dans  $\mathcal{A}_{\beta_n}$ . Soit  $\hat{b}_1$  et  $\hat{b}_2$  deux branches adjacentes de  $\hat{\tau}^i$ ; comme  $(E_n)$  converge vers  $E$ , pour  $n$  assez grand, il existe une feuille  $\hat{e}_n$  de l'image réciproque de  $E_n$  qui est portée par  $\hat{b}_1$  et par  $\hat{b}_2$ . Comme la restriction du morphisme  $\Phi_n$  à  $\pi_{\beta_n}(\hat{e}_n)$  est une isométrie, on en déduit que  $\Phi_n \circ \pi_{\beta_n}$  est une réalisation faible de  $\tau^i$  dans  $\mathcal{A}$ . En utilisant à nouveau un résultat de [Ot3], on conclut que  $E^i$  est réalisé dans  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Remarque.** Dans la preuve de ce corollaire, nous avons vu que toute composante de  $E$  qui intersecte  $B$  transversalement est réalisée dans  $\mathcal{A}$ . Supposons que  $e \subset E$  est une feuille compacte qui intersecte  $B$  transversalement et qui est contenue dans le bord de la surface embrassée par une composante  $E^j$  de  $E$ . Alors  $B$  intersecte aussi  $E^j$ , donc  $E^j$  est réalisé dans  $\mathcal{A}$ . D'après la preuve de la proposition 4.2, au moins une composante de  $E$  intersecte  $B$  transversalement. On en déduit qu'il existe une composante connexe de  $E$  qui est réalisée dans  $\mathcal{A}$  et qui n'est contenue dans le bord d'aucune des surfaces embrassées par les minima exceptionnels de  $\lambda$ .  $\diamond$

### 4.3 Propreté et topologie algébrique

Revenons à la situation qui nous intéresse : quand l'action de  $\pi_1(M)$  sur  $\mathcal{A}$  provient d'une suite de représentations  $\rho_n(\pi_1(M))$  qui n'est pas relativement compacte. Soit  $s_n$  la métrique sur  $\partial_{\chi < 0} M$  induite par la composition de l'inclusion et d'un homéomorphisme  $h_n : M - (\lambda_n^{(p)} \cup \partial_{\chi=0} M) \rightarrow N(\rho_n)$  associé à  $\sigma_n$ . Le lemme suivant qui sera démontré dans la section suivante est une étape importante dans la preuve de la proposition 4.1.

**Lemme 4.3.1.** *Soient  $(\lambda_n)$  une suite de laminations géodésiques mesurées telle que  $(\dot{\lambda}_n)$  converge dans  $\mathcal{ML}(\partial M)/\mathcal{R}$ ,  $\dot{\lambda}$  la limite de  $(\dot{\lambda}_n)$  et  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$  un représentant de  $\dot{\lambda}$ . Il existe une expansion  $E \in \mathcal{L}(\partial M)$  de  $\lambda$  telle que pour toute composante  $E^i$  de  $E$  l'une des deux affirmations suivantes est satisfaite :*

- i) *il existe une suite de multi-courbes pondérées  $\gamma_n^i$  telle que  $(|\gamma_n^i|)$  converge vers  $E^i$ , que  $(\gamma_n^i)$  converge dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$  vers une lamination géodésique mesurée non triviale  $\gamma_\infty^i$  et que  $l_{s_n}(\gamma_n^i) \leq l_{s_n}(\lambda_n) + i(\lambda_n, \partial' \bar{S}(E^i)) l_{s_n}(\partial' \bar{S}(E^i))$ ;*
- ii)  *$E^i$  est une feuille compacte de  $|\dot{\lambda}|$ .*

Soit  $E^i$  une composante de  $E$  qui satisfait i) ci-dessus; nous allons montrer que  $E^i$  n'est pas réalisé dans  $\mathcal{A}$ .

D'après [MoS1], pour  $n$  assez grand, on a  $\varepsilon_n l_{\sigma_n}(\partial' \bar{S}(E^i)^*) < l_{\mathcal{A}}(\partial' \bar{S}(E^i)) + 1$ .

Notons  $\eta_n = i(\lambda_n, \partial' \bar{S}(E^i))$ ; comme  $|\dot{\lambda}| \subset E$ , l'affirmation 3.3.2 entraîne que  $\eta_n \rightarrow 0$ . D'après le lemme d'approximation des courbes légèrement plissées (lemme A), ceci nous permet

d'approcher  $l_{s_n}(\partial' \bar{S}(E^i))$  par  $l_{\sigma_n}(\partial' \bar{S}(E^i))$ , i.e.  $l_{s_n}(\partial' \bar{S}(E^i)) \leq K_{\eta_n}(l_{\sigma_n}(\partial' \bar{S}(E^i)) + A_{\eta_n})$  avec  $K_{\eta_n} \rightarrow 1$  et  $A_{\eta_n} \rightarrow 0$ . On en déduit que pour  $n$  assez grand,  $\varepsilon_n l_{s_n}(\partial' \bar{S}(E^i)) < l_{\mathcal{A}}(\partial' \bar{S}(E^i)) + 1$ . En combinant avec l'inégalité de  $i$ ), on obtient

$$\varepsilon_n l_{s_n}(\gamma_n^i) \leq \varepsilon_n l_{s_n}(\lambda_n) + i(\lambda_n, \partial' \bar{S}(E^i))(l_{\mathcal{A}}(\partial' \bar{S}(E^i)) + 1) \rightarrow 0.$$

Comme  $\gamma_\infty^i$  n'est pas triviale, alors  $l_{s_0}(\gamma_n^i) \rightarrow l_{s_0}(\gamma_\infty^i) > 0$ . On en déduit que  $\varepsilon_n \frac{l_{s_n}(\gamma_n^i)}{l_{s_0}(\gamma_n^i)} \rightarrow 0$  et le théorème suivant nous permet de conclure que  $E^i$  n'est pas réalisée dans  $\mathcal{A}$ .

**Théorème 4.4 (Théorème de continuité [Ot2]).** *Soit  $(\rho_n)$  une suite de représentations géométriquement finies de  $\pi_1(M)$  qui tend vers une action minimale et à petits stabilisateurs d'arêtes de  $\pi_1(M)$  sur un arbre réel  $\mathcal{A}$ . Soit  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  tel que  $\forall a \in \pi_1(M)$ ,  $\varepsilon_n l_{\sigma_n}(a) \rightarrow \delta_{\mathcal{A}}(a)$  et soit  $L$  une lamination géodésique qui contient une seule sous-lamination géodésique minimale et qui est réalisée dans  $\mathcal{A}$ . Alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}(L)$  de  $L$  et des constantes  $K, n_0$  telles que pour toute courbe simple compacte  $c \subset \mathcal{V}(L)$  et pour  $n \geq n_0$ ,*

$$\varepsilon_n l_{\sigma_n}(c^*) \geq K l_{s_0}(c).$$

*Démonstration.* Le comportement de la longueur des laminations géodésiques qui sont réalisées dans  $\mathcal{A}$  a été décrit par J.-P. Otal dans [Ot2] lorsque  $M$  est un bretzel et dans [Ot3] lorsque  $M$  est un fibré en intervalles sur une surface. En fait les preuves de ces résultats s'étendent sans changement au cas général où  $M$  est une variété hyperbolique quelconque, ce qui donne l'énoncé précédent. □

D'après le corollaire 4.2.4, au moins une composante de  $E$  est réalisée dans  $\mathcal{A}$  et d'après ce qui précède, cette composante est une feuille compacte  $l$  de  $|\dot{\lambda}|$ . D'après la remarque qui suit le corollaire 4.2.4, on peut supposer que  $l$  n'est contenue dans le bord d'aucune des surfaces embrassées par les minima exceptionnels de  $\dot{\lambda}$ . Comme  $l$  est réalisée dans  $\mathcal{A}$ , on a  $\varepsilon_n l_{\sigma_n}(l^*) \rightarrow \delta_{\mathcal{A}}(l) > 0$ . Soient  $P^1$  et  $P^2$  deux pantalons contenus dans  $\partial M - |\dot{\lambda}|$  et dont le bord contient  $l$  (ils peuvent être confondus) et  $c \subset P^1 \cup P^2$  une géodésique compacte simple qui intersecte  $l$  en un ou deux points. L'existence de tels pantalons est garantie par le fait que  $l$  n'est contenue dans le bord d'aucune des surfaces embrassées par les minima exceptionnels de  $\dot{\lambda}$ . La géodésique  $c$  satisfait l'énoncé suivant :

**Lemme 4.3.2.** *La géodésique simple compacte  $c$  a les deux propriétés suivantes :*

- $\frac{l_{s_n}(l)}{l_{s_n}(c)} \rightarrow 0$  ;
- $\exists K$  tel que  $l_{s_n}(c) \leq K l_{\sigma_n}(c^*)$ .

Avant de prouver le lemme 4.3.2 achevons la preuve de la proposition 4.1. D'après le lemme 4.3.2,  $\frac{l_{\sigma_n}(l^*)}{l_{\sigma_n}(c^*)} \leq K \frac{l_{s_n}(l)}{l_{s_n}(c)} \rightarrow 0$  et d'après [MoS1],  $\varepsilon_n l_{\sigma_n}(c^*)$  est bornée. On en déduit que  $\varepsilon_n l_{\sigma_n}(l^*) \rightarrow 0$ ; ceci contredit le fait que  $l$  est réalisée dans  $\mathcal{A}$  et conclut la preuve de la proposition 4.1. □

*Démonstration du lemme 4.3.2*

Afin d'établir la première propriété, nous allons étudier le comportement de la suite  $(s_n)$ . Comme  $(\dot{\lambda}_n)$  converge, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la famille  $\lambda_n^{(p)}$  des feuilles de  $\lambda_n$  dont le poids vaut  $\pi$  ne dépend pas de  $n$ , notons-la  $\lambda^{(p)}$  ( $\lambda^{(p)}$  ne contient pas nécessairement toutes les feuilles de poids  $\pi$  de  $\lambda$ ). Comme  $l$  est réalisée dans  $\mathcal{A}$ , ce n'est pas

une feuille de  $\lambda^{(p)}$ ; notons  $S$  la composante connexe de  $\partial M - \lambda^{(p)}$  qui contient  $l$  et notons dorénavant  $s_n$  la métrique hyperbolique complète induite sur  $S$  par l'inclusion. Comme  $l$  est réalisée dans  $\mathcal{A}$ , sa longueur tend vers l'infini, et  $(s_n)$  n'est pas bornée dans l'espace de Teichmüller. D'après [MoS1] une suite extraite de  $(s_n)$  tend vers une action de  $\pi_1(S)$  sur un  $\Lambda$ -arbre  $\mathcal{T}$ . La propriété essentielle de  $\mathcal{T}$  est que pour toute paire de géodésiques simples compactes  $c_1, c_2$  telle que  $l_{s_n}(c_1) \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{s_n}(c_2)}{l_{s_n}(c_1)} = \frac{\delta_{\mathcal{T}}(c_2)}{\delta_{\mathcal{T}}(c_1)}$ . D'après [MoO],  $\mathcal{T}$  est l'arbre dual d'une lamination géodésique  $\Lambda$ -mesurée  $\mathcal{L}$ . Dans ce cadre, nous allons appliquer la version suivante du théorème de continuité (qui est démontrée dans l'appendice).

**Theorem B1.** *Soient  $(s_n)$  une suite de métriques hyperboliques complètes de volumes finis sur une surface  $S$  qui tend vers une lamination géodésique  $\Lambda$ -mesurée  $\mathcal{L}$  et  $(\lambda_n)$  une suite de laminations géodésiques  $(\mathbb{R}$ -)mesurées telle que  $(\lambda_n)$  converge vers  $\lambda \in \mathcal{ML}(S)/\mathcal{R}$  et que  $l_{s_n}(\lambda_n)$  est bornée. Alors  $|\lambda|$  n'intersecte pas  $|\mathcal{L}|$  transversalement.*

Comme  $l_{s_n}(\lambda_n)$  est bornée (lemme 4.1.1), ce théorème entraîne que  $|\lambda|$  n'intersecte pas  $|\mathcal{L}|$  transversalement. Comme  $l$  est réalisée dans  $\mathcal{A}$ , alors  $l_{s_n}(l) \rightarrow \infty$ . D'après la construction du  $\Lambda$ -arbre  $\mathcal{T}$ , il en découle que  $\delta_{\mathcal{L}}(l) > 0$ . De ce fait et de l'affirmation 1.2.1 on déduit que  $|\mathcal{L}|$  contient  $l$  et au moins une feuille qui spirale autour de  $l$ . Il s'en suit que  $0 < \delta_{\mathcal{L}}(l) < \delta_{\mathcal{L}}(c)$ , d'où  $\frac{l_{s_n}(l)}{l_{s_n}(c)} \rightarrow 0$ .

La seconde propriété vient du fait que  $c$  peut être découpée en arcs dont la mesure de plissage est bornée mais pas la longueur.

**Affirmation 4.3.3.** *Pour toute suite d'arcs  $\kappa_n \subset c$  tels que  $\underline{\lim} \int_{\kappa_n} d\lambda_n > 0$ ,  $l_{s_n}(\kappa_n) \rightarrow \infty$ .*

*Démonstration.* Nous allons comparer les comportements des suites  $(s_n)$  et  $(\lambda_n)$  au voisinage de  $l$ . Notons  $\lambda'$  le représentant de  $\lambda$  qui appartient à  $\mathcal{P}(M)$ ; si  $l$  est une feuille de  $\lambda_n$ , alors son poids dans  $\lambda_n$  tend à être au moins aussi grand que son poids dans  $\lambda'$ . Comme  $l_{s_n}(l) \rightarrow \infty$  et que  $l_{s_n}(\lambda_n)$  est bornée, on a  $l \not\subset |\lambda_n|$  pour  $n$  assez grand.

Choisissons une suite extraite telle que  $(|\lambda_n|)$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $L'$ . Soit  $\mathcal{V}(l)$  un voisinage annulaire de  $l$ ; d'après l'affirmation 3.3.3,  $l \subset L'$ . On en déduit que pour  $n$  assez grand,  $\mathcal{V}(l) \cap |\lambda_n|$  est constitué de segments disjoints qui joignent les deux composantes de  $\partial\mathcal{V}(l)$  et tourne de nombreuses fois autour de  $l$  (cf. figure 4.1). D'après l'affirmation 3.3.2,  $i(\lambda_n, l) \rightarrow 0$ , le poids total de la mesure transverse portée par  $|\lambda_n| \cap \mathcal{V}(l)$  tend donc vers 0.

Soit  $\kappa_n \subset c$  une suite de segments telle que  $\underline{\lim} \int_{\kappa_n} d\lambda_n > 0$ . Comme  $c \cap |\lambda| \subset l$ , alors, d'après l'affirmation 3.3.1,  $\int_{\kappa_n - \mathcal{V}(l)} d\lambda_n \rightarrow 0$ . Il suffit donc de prouver l'affirmation 4.3.3 pour  $\kappa_n \subset \mathcal{V}(l)$ . On peut aussi supposer que  $\partial\kappa_n \subset |\lambda_n|$ , ainsi  $\partial\kappa_n$  est contenu dans  $|\lambda_n| \cap c$  et  $\kappa_n$  est bien défini pour n'importe quelle métrique hyperbolique sur  $S$  (voir la note de la section 1.1). Étant donnée une orientation de  $c$  on munit les points de  $\kappa_n \cap \lambda_n$  de l'ordre induit. D'après la description (faite plus haut) de  $\lambda_n \cap \mathcal{V}(l)$ , pour  $n$  assez grand,  $\kappa_n$  contient un arc  $\kappa'_n$  tel que  $\int_{\kappa'_n} d\lambda_n \geq \frac{1}{2} \int_{\kappa_n} d\lambda_n$  et que tout point  $x_n$  de  $\kappa'_n \cap \lambda_n$  est relié à un point  $y_n > x_n$  de  $\kappa_n \cap \lambda_n$  par un arc  $]x_n, y_n[ \subset \lambda_n - \kappa_n$ . Fixons  $n$  et considérons un point  $x_n$  de  $\kappa'_n \cap \lambda_n$  et le point  $y_n$  associé. Notons  $c_{x_n y_n}$  la courbe simple compacte réunion de  $[x_n, y_n] \subset \lambda_n$  et de l'arc  $\kappa_{x_n y_n} \subset \kappa_n$  joignant  $x_n$  à  $y_n$ . Cette courbe  $c_{x_n y_n}$  est librement homotope à  $l$ , donc  $l_{s_n}(c_{x_n y_n}) \geq l_{s_n}(l)$ . On en déduit que  $\forall n$ ,  $\forall x_n \subset \kappa'_n \cap \lambda_n$ ,  $l_{s_n}([x_n, y_n]) \geq l_{s_n}(l) - l_{s_n}(\kappa_n)$ . Comme  $l_{s_n}(\lambda_n) \geq \inf\{l_{s_n}([x_n, y_n]) \mid x_n \subset \kappa'_n \cap \lambda_n\} \int_{\kappa'_n} d\lambda_n$ , alors  $l_{s_n}(\lambda_n) \geq (\int_{\kappa'_n} d\lambda_n)(l_{s_n}(l) - l_{s_n}(\kappa_n))$ . On a donc  $l_{s_n}(\kappa_n) \geq l_{s_n}(l) - \frac{2}{\int_{\kappa_n} d\lambda_n} l_{s_n}(\lambda_n)$ . Comme  $l_{s_n}(l) \rightarrow \infty$  et que  $l_{s_n}(\lambda_n)$  est bornée, alors  $l_{s_n}(\kappa_n) \rightarrow \infty$ .  $\square$

Soit  $0 < \epsilon < \frac{i(c, \lambda')}{2}$ ; il découle de la description de  $\lambda_n \cap \mathcal{V}(l)$  que, pour  $n$  assez grand, on peut découper  $c$  en  $\lfloor \frac{i(c, \lambda_n)}{\epsilon} \rfloor$  segments  $\kappa_n^j$  tels que  $\forall j \leq \lfloor \frac{i(c, \lambda_n)}{\epsilon} \rfloor$ ,  $\epsilon \leq \int_{\kappa_n^j} d\lambda_n < 2\epsilon$ . D'après

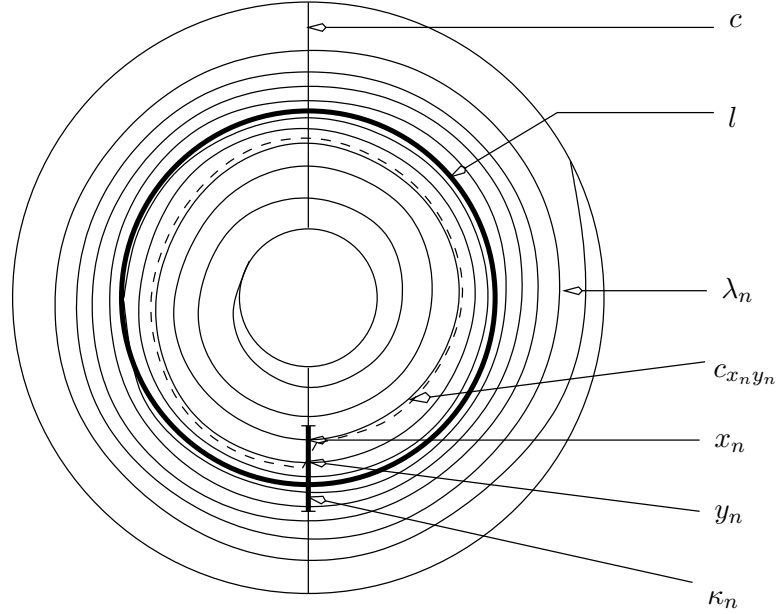


FIG. 4.1 – Dessin de  $\mathcal{V}(l)$

l'affirmation 4.3.3,  $\forall j, l_{s_n}(\kappa_n^j) \rightarrow \infty$ . Étant donné  $\epsilon$  tel que  $2\epsilon \leq \frac{\pi}{3}$ , notons  $c_n$  la réunion des segments géodésiques de  $(M, \sigma_n)$  qui relient les extrémités des segments  $\kappa_n^j$ . D'après le lemme d'approximation des segments légèrement plissés (lemme A.2)  $\exists K_\epsilon > 0$  tel que,  $l_{s_n}(c) \leq K_\epsilon l_{\sigma_n}(c_n)$  et d'après la formule de Gauss-Bonnet les arcs géodésiques qui constituent  $c_n$  font entre eux des angles supérieurs à  $\pi - 2\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ . La courbe  $c_n$  est donc la réunion de segments qui sont de plus en plus long (pour les métriques  $\sigma_n$ ) et font entre eux des angles supérieur à  $\frac{\pi}{3}$ . D'après un résultat classique (voir [Ot3] par exemple),  $\exists K'_\epsilon$  tel que  $l_{\sigma_n}(c_n) \leq K'_\epsilon l_{\sigma_n}(c^*)$ . Ainsi en prenant  $K = K'_\epsilon K_\epsilon$  on obtient la seconde propriété du lemme 4.3.2.  $\square$

#### 4.4 Construction de $E$

Soit  $S$  une composante connexe de  $\partial_{\chi < 0} M - \lambda^{(p)}$ ; fixons  $n$  et choisissons une suite  $(\nu_k)$  de géodésiques simples compactes pondérées qui converge dans  $\mathcal{ML}(S)$  vers  $\lambda_n \cap S$ . On a alors  $l_{s_n}(\nu_k) \rightarrow l_{s_n}(\lambda_n \cap S)$ . Comme  $l_{s_n}(\lambda_n)$  est bornée (lemme 4.1.1), on construit, en utilisant une extraction diagonale, une suite de géodésiques simples compactes pondérées  $(\nu_n)$  telle que  $l_{s_n}(\nu_n)$  est bornée et que  $(\dot{\nu}_n)$  converge vers  $\dot{\lambda} \cap S$ . Afin de simplifier les calculs, nous allons supposer que  $l_{s_n}(\nu_n) \leq l_{s_n}(\lambda_n)$  et que  $i(\nu_n, \partial' \bar{S}(\lambda^i)) \leq i(\lambda_n, \partial' \bar{S}(\lambda^i))$  pour toute composante connexe  $\lambda^i$  de  $\lambda$  (cette condition peut être réalisée en multipliant la mesure de  $\nu_n$  par une constante adéquate  $C_n < 1$  qui satisfait alors  $C_n \rightarrow 1$ ).

Soient  $\lambda^i$  un minimal exceptionnel de  $\dot{\lambda}$  et  $S(\lambda^i)$  la surface qu'il embrasse. Nous allons modifier  $\nu_n \cap S(\lambda^i)$  par l'opération illustrée dans la figure 4.2. Ceci nous fournira la suite de multi-courbes pondérées  $(\gamma_n^i)$  qui intervient dans le lemme 4.3.1. Cette construction nous donne facilement le contrôle attendu de  $l_{s_n}(\gamma_n^i)$  mais on doit être plus attentif pour garantir que  $\gamma_n^i$  ne tend pas vers la lamination géodésique mesurée triviale.

Considérons une suite extraite telle que  $|\dot{\nu}_n|$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $N$ ; d'après l'affirmation 3.3.3,  $|\dot{\lambda}| \subset N$ . On en déduit que  $k = N \cap S(\lambda^i)$  est la réunion de  $|\lambda^i|$ , de géodésiques simples qui spiralent des deux côtés autour de  $|\lambda^i|$  et de demi-géodésiques simples qui partent de  $\partial' \bar{S}(\lambda^i)$  et spiralent autour de  $|\lambda^i|$ . Soit  $c \subset S(\lambda^i)$  une courbe simple compacte; toute feuille de  $N$  qui intersecte  $S(\lambda^i)$  intersecte aussi  $c$ . Il en découle qu'il

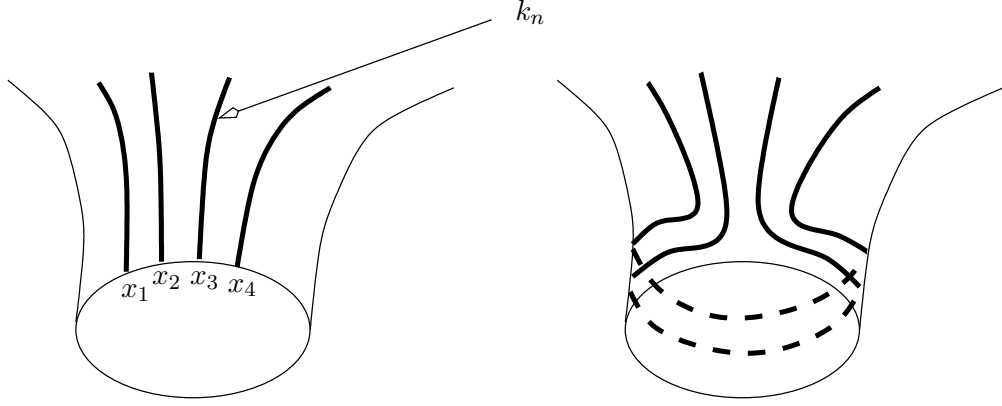


FIG. 4.2 – Constructiton d'une multi-courbe à partir de  $k_n$

existe un réseau ferroviaire (avec des “voies de garage”)  $\tau \subset \bar{S}(\lambda^i)$  tel que :

- $\tau$  porte  $N \cap S(\lambda^i)$ , i.e.  $N \cap S(\lambda^i) \subset \tau$  et chaque branche de  $\tau$  porte  $N$  ;
- $\tau$  a un aiguillage  $A \subset c$  et les autres sont contenus dans  $\partial' \bar{S}(\lambda^i)$  (et ils correspondent aux voies de garage) ;
- toute paire d'arcs  $k^1, k^2 \subset k - A$  telle que  $\bar{k}^1$  et  $\bar{k}^2$  sont isotopes relativement à  $A \cup \partial' \bar{S}(\lambda^i)$  est contenue dans une branche de  $\tau$ .

Un tel réseau ferroviaire peut être obtenu de la manière suivante. Soit  $\tau' \subset \bar{S}(\lambda^i)$  un réseau ferroviaire (avec des voies de garage) qui porte  $N \cap \bar{S}(\lambda^i)$  et possède un aiguillage  $A \subset c$  tandis que les autres aiguillages sont contenus dans  $\partial' \bar{S}(\lambda^i)$  (voir [Bo2] ou [Ot3] pour la construction de  $\tau'$ ). Soient  $b_1$  et  $b_2$  deux branches distinctes de  $\tau'$  qui contiennent deux arcs  $k_1 \subset k \cap b_1$  et  $k_2 \subset k \cap b_2$  qui sont isotopes relativement à  $A \cup \partial' \bar{S}(\lambda^i)$  ; il existe deux arcs  $\kappa_1, \kappa_2 \subset A \cup \partial' \bar{S}(\lambda^i)$  tels que  $k_1 \cup \kappa_1 \cup k_2 \cup \kappa_2$  borde un disque  $D \subset \bar{S}(\lambda^i)$ . Soit  $k_3$  une composante connexe de  $k \cap D$  ; alors  $\partial k_3 \in \kappa_1 \cup \kappa_2$ . Comme  $\kappa_1, \kappa_2$  et  $k_3$  sont des arcs géodésiques, les extrémités de  $k_3$  n'appartiennent pas au même segment  $\kappa_i$ . Le segment  $k_3$  est donc isotope à  $k_1$  relativement à  $\kappa_1 \cup \kappa_2 \subset A \cup \partial' \bar{S}(\lambda^i)$ . Si  $[D - (b_1 \cup b_2)] \cap k \neq \emptyset$ , remplaçons  $k_2$  par  $k_3$  et  $b_2$  par la branche de  $\tau'$  qui contient  $k_3$  et répétons cette opération jusqu'à ce que  $[D - (b_1 \cup b_2)] \cap k = \emptyset$ . Étendons ensuite les feuilletages de  $b_1$  et de  $b_2$  en un feuilletage de  $b_1 \cup D \cup b_2$  puis remplaçons  $b_1$  et  $b_2$  par la nouvelle branche  $b_1 \cup D \cup b_2$  ainsi construite. En répétant ces opérations un nombre fini de fois, on obtient le réseau ferroviaire  $\tau$  attendu.

Fixons  $n$  assez grand pour que  $|\nu_n| \cap \bar{S}(\lambda^i)$  soit portée par  $\tau$  et notons  $k_n$  la réunion de deux copies parallèles de  $|\nu_n| \cap \bar{S}(\lambda^i)$  portées par  $\tau$ . Soit  $d$  une composante connexe de  $\partial' \bar{S}(\lambda^i)$  ; alors  $\sharp(d \cap k_n)$  est pair. Choisissons  $x_1$  tel que si  $x_1, x_2, \dots, x_{2p}$  sont les points de  $d \cap k_n$  ordonnés le long de  $d$ , alors l'arc  $[x_1, x_{2p}] \subset d$  joignant  $x_1$  à  $x_{2p}$  sans passer par  $x_2$  n'est pas contenu dans  $\tau$ . Pour chaque  $i \leq p$ , ajoutons à  $k_n$  l'arc de  $d$  joignant  $x_i$  à  $x_{2p+1-i}$  et contenant  $[x_1, x_{2p}]$  (cf. figure 4.3).

En faisant ceci pour chaque composante de  $\partial' \bar{S}(\lambda^i)$  qui intersecte  $k_n$ , on obtient une famille  $k'_n$  de courbes simples compactes. Chaque composante de  $k'_n$  est ou bien librement homotope à une géodésique simple compacte ou homotope à un point ; notons  $|\gamma_n^i|$  la réunion des géodésiques compactes ainsi obtenues (on ne sait pas encore si  $|\gamma_n^i|$  est vide ou non). En munissant chaque feuille de  $|\gamma_n^i|$  d'une mesure de Dirac dont le poids est la moitié de celui de  $\nu_n$  on obtient une multi-courbe pondérée  $\gamma_n^i \in \mathcal{ML}(S(\lambda^i))$ . Cette multi-courbe pondérée vérifie

$$l_{s_n}(\gamma_n^i) \leq l_{s_n}(\nu_n) + i(\nu_n, \partial' \bar{S}(\lambda^i)) l_{s_n}(\partial' \bar{S}(\lambda^i)) \leq l_{s_n}(\lambda_n) + i(\lambda_n, \partial' \bar{S}(\lambda^i)) l_{s_n}(\partial' \bar{S}(\lambda^i))$$

d'après nos hypothèses simplificatrices sur  $l_{s_n}(\nu_n)$  et  $i(\nu_n, \partial' \bar{S}(\lambda^i))$ .

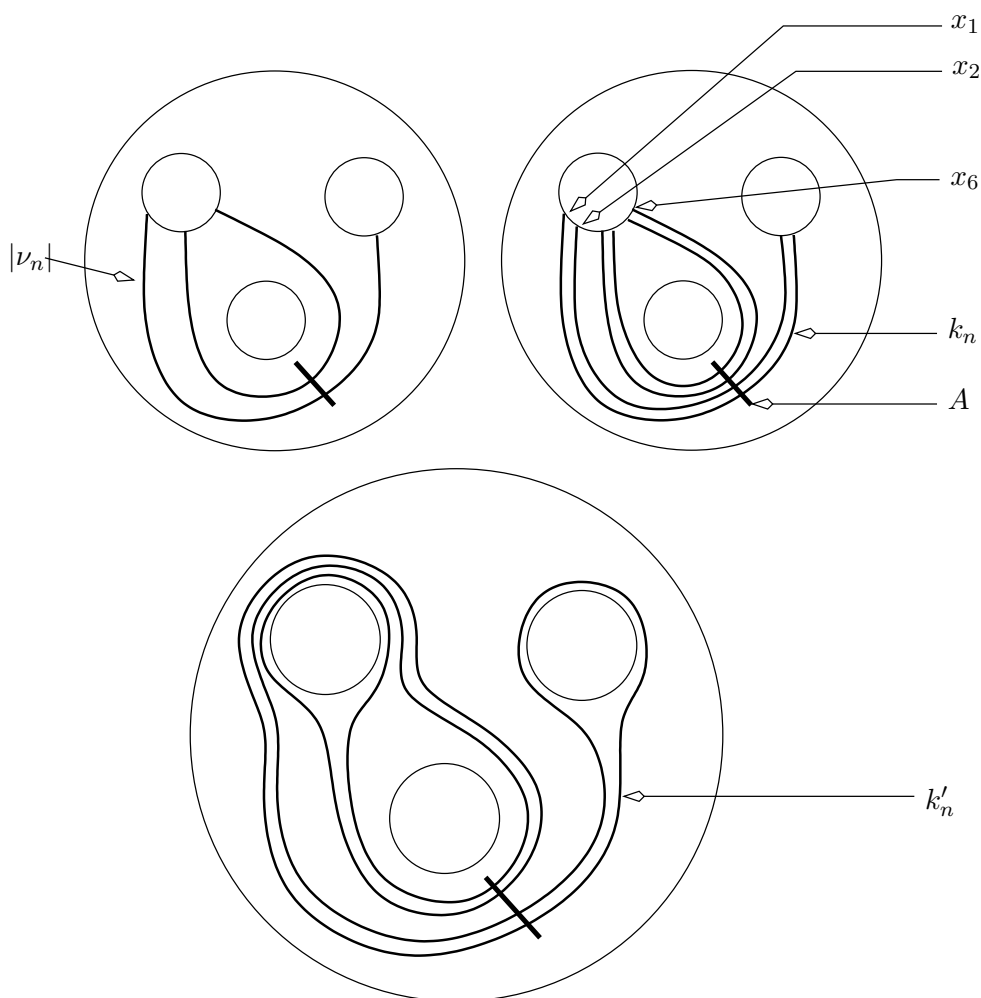


FIG. 4.3 – Un exemple de la construction de  $k'_n$

Montrons maintenant que  $|\gamma_n^i|$  n'est pas vide.

**Affirmation 4.4.1.** *Aucune composante de  $k'_n - A$  ne peut être homotopée dans  $A$ .*

*Démonstration.* Fixons  $n$  et choisissons une composante  $\kappa$  de  $k'_n - A$ . Si  $\kappa$  est une composante de  $k_n - A$ , alors c'est un segment géodésique. Comme  $A$  est aussi un segment géodésique,  $\kappa$  ne peut pas être homotopé dans  $A$ . Si  $\kappa$  n'est pas une composante de  $k_n - A$ , c'est la réunion de deux composantes  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  de  $k_n - A$  et d'un arc  $\kappa_3$  contenu dans  $\partial' \bar{S}(\lambda^i)$  mais pas dans  $\tau$ . S'il existe un arc  $\kappa_4 \subset \partial' \bar{S}(\lambda^i) - (\kappa_1 \cup \kappa_2)$  tel que  $\kappa_1 \cup \kappa_4 \cup \kappa_2$  peut être homotopé dans  $A$ , alors  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont homotopes relativement à  $A \cup \partial' \bar{S}(\lambda^i)$ , ils sont donc contenus dans la même branche  $b$  de  $\tau$  et  $\kappa_4 \subset b$ . Par construction  $\kappa_3 \not\subset b$  donc  $\kappa_1 \cup \kappa_3 \cup \kappa_2$  ne peut pas être homotopé dans  $A$ .  $\square$

**Affirmation 4.4.2.** *Il existe une courbe simple compacte  $c' \subset S(\lambda^i)$  telle que  $i(\gamma_n^i, c') \geq \frac{1}{2} \int_A d\lambda^i$  pour  $n$  assez grand.*

*Démonstration.* On a vu dans la preuve de l'affirmation précédente que toute composante de  $k'_n - A$  est homotope ou bien à un rail de  $\tau$  ou bien à la réunion de deux rails et d'un segment contenu dans  $\partial' \bar{S}(\lambda^i)$ . Il y a un nombre fini de possibilités pour la classe d'homotopie relative à  $A \cup \partial' \bar{S}(\lambda^i)$  d'un tel arc. D'un autre côté, il existe une infinité de géodésiques simples compactes qui passe près de  $A$ . On peut donc trouver une courbe  $c'$  et un arc  $A' \subset c'$  qui est proche de



$A$  et tel qu'aucune composante de  $k'_n - A'$  ne puisse être homotopée dans  $c' - A'$ . Si  $A'$  est suffisamment proche de  $A$ , il découle de l'affirmation 4.4.1 qu'aucune composante de  $k'_n - A'$  ne peut être homotopée dans  $A'$ , donc aucune composante de  $k'_n - A'$  ne peut être homotopée dans  $c'$ . On en déduit que  $i(\gamma_n^i, c') \geq \int_{A'} d\nu_n^i$ . D'après l'affirmation 3.3.1,  $\varinjlim \int_{A'} d\nu_n^i = \int_{A'} d\lambda^i$ . Comme  $A'$  est proche de  $A$  alors  $\int_{A'} d\lambda^i = \int_A d\lambda^i$  et  $i(\gamma_n^i, c') \geq \frac{1}{2} \int_A d\lambda^i$  pour  $n$  assez grand.  $\square$

Comme  $\lambda^i$  intersecte  $A$  transversalement, alors  $\int_A d\lambda^i > 0$ . On déduit de l'affirmation ci-dessus que, pour  $n$  assez grand,  $i(\gamma_n^i, c') > 0$ , donc que  $\gamma_n^i$  n'est pas triviale.

Soit  $d \subset S(\lambda^i)$  une géodésique simple compacte, d'après l'affirmation 3.3.2,  $i(d, \nu_n) \rightarrow i(d, \lambda)$ . Par construction  $i(d, \gamma_n^i) \leq i(d, \nu_n)$ , donc, quitte à extraire une sous-suite,  $\gamma_n^i$  converge dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$  vers une lamination géodésique mesurée  $\gamma_\infty^i$ . Comme  $i(\gamma_n^i, c') \geq \frac{1}{2} \int_A d\lambda^i > 0$ ,  $\gamma_\infty^i$  n'est pas triviale.

Choisissons une suite extraite telle que  $|\gamma_n^i|$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $E^i$ . Montrons que  $E^i$  est une expansion de  $\lambda^i$ . Par construction  $|\gamma_\infty^i| \subset E^i \subset S(\lambda^i)$ , il suffit donc de montrer l'affirmation suivante.

**Affirmation 4.4.3.** *La lamination géodésique  $|\gamma_\infty^i|$  n'intersecte pas  $|\lambda^i|$  transversalement.*

*Démonstration.* Notons  $w(\nu_n)$  le poids de  $\nu_n$ . Comme chaque feuille de  $\gamma_n$  est homotope à une composante de  $k'_n$  et a un poids égale à  $w(\nu_n)$ , alors  $i(\gamma_n, \nu_n) \leq w(\nu_n) \int_{k'_n} d\nu_n$ . Comme  $k_n$  est la réunion de deux copies parallèles de  $|\nu_n| \cap S(\lambda^i)$  alors  $\int_{k_n} d\nu_n = 0$ . Pour obtenir  $k'_n$ , nous avons ajouté à  $k_n$  des arcs contenus dans  $\partial' \bar{S}(\lambda^i)$ . Comme le nombre d'intersection de chacune de ces arcs avec  $\nu_n$  est plus petit que  $i(\partial' \bar{S}(\lambda^i), \nu_n)$ , on a  $\int_{k'_n} d\nu_n \leq \#\{(|\nu_n| \cap \partial' \bar{S}(\lambda^i))\} i(\partial' \bar{S}(\lambda^i), \nu_n)$ . Il s'en suit que  $i(\gamma_n, \nu_n) \leq w(\nu_n) \#\{(|\nu_n| \cap \partial' \bar{S}(\lambda^i))\} i(\partial' \bar{S}(\lambda^i), \nu_n) = i(\partial' \bar{S}(\lambda^i), \nu_n)^2$ . D'après l'affirmation 3.3.2,  $i(\partial' \bar{S}(\lambda^i), \nu_n) \rightarrow 0$ , donc  $i(\gamma_n, \nu_n) \rightarrow 0$ .

Supposons que  $\gamma_\infty^i$  intersecte  $\lambda^i$  transversalement. D'après [Ot3], il existe un réseau ferroviaire  $\tau_\gamma \subset S(\lambda^i)$  qui porte  $E^i$ , qui possède un seul aiguillage qui est disjoint de  $|\lambda^i|$  et dont tout les rails sont transverses à  $\lambda^i$ . Soit  $b_\gamma$  une branche de  $\tau_\gamma$  qui porte  $\gamma_\infty^i$  et intersecte  $\lambda^i$ , notons  $b_\gamma(\gamma_\infty^i) > 0$  la  $\gamma_\infty^i$ -mesure d'une traverse de  $b_\gamma$  et  $\int_{b_\gamma} d\lambda^i > 0$  la  $\lambda^i$ -mesure d'un rail de  $b_\gamma$ . Comme  $(|\gamma_n^i|)$  converge vers  $E^i$ , pour  $n$  assez grand,  $\gamma_n^i$  est portée par un sous-réseau de  $\tau_\gamma$ . Comme  $(\gamma_n^i)$  converge vers  $\gamma_\infty^i$ , on a  $b_\gamma(\gamma_n^i) \rightarrow b_\gamma(\gamma_\infty^i)$ . D'après l'affirmation 3.3.1,  $\int_{b_\gamma} d\nu_n \rightarrow \int_{b_\gamma} d\lambda^i$ . On a donc, pour  $n$  assez grand,  $i(\gamma_n^i, \nu_n) \geq b_\gamma(\gamma_n^i) \int_{b_\gamma} d\nu_n \geq \frac{1}{2} b_\gamma(\gamma_\infty^i) \int_{b_\gamma} d\lambda^i > 0$ . Cependant, nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que  $i(\gamma_n^i, \nu_n) \rightarrow 0$ . Cette contradiction conclut la preuve de l'affirmation 4.4.3  $\square$

En faisant cette construction pour chaque minimal exceptionnel de  $\lambda$  et en ajoutant au résultat les feuilles compactes de  $\lambda$ , on obtient une lamination géodésique  $E$  qui est une expansion de  $\lambda$  et satisfait les conditions du lemme 4.3.1.

## 4.5 Les métriques sur le bord

À ce stade de la démonstration, il est peut-être judicieux de récapituler. Soient  $M$  une variété hyperbolique compacte, orientable, de dimension 3,  $(\sigma_n)$  une suite de métriques géométriquement finies sur  $\text{int}(M)$  et  $\lambda_n \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\sigma_n$ . Dans les sections précédentes, nous avons montré que si  $\lambda_n$  converge vers  $\lambda$  dans  $\mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$ , alors il existe une suite  $\rho_n : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  de représentations associées aux  $(\sigma_n)$  telle qu'une suite extraite de  $(\rho_n)$  converge vers une représentation  $\rho_\infty : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ . D'après [Jor],  $\rho_\infty$  est fidèle et discrète. Nous allons maintenant montrer que  $\rho_\infty$  est géométriquement finie et correspond à une métrique  $\sigma_\infty$  sur l'intérieur de  $M$ . Enfin nous montrerons qu'une suite extraite

de  $(\sigma_n)$  converge vers  $\sigma_\infty$ , ce qui nous permettra de conclure à la propriété de  $b_{\mathcal{R}}$ .

Commençons par isoler les courbes compactes de  $\partial M$  dont la longueur tend vers 0.

**Lemme 4.5.1.** *Quitte à extraire une sous-suite, il existe une multi-courbe  $L^0 \subset \partial_{\chi < 0} M$  qui a les propriétés suivantes :*

- toute composante connexe  $c$  de  $L^0$  vérifie  $l_{s_n}(c) \rightarrow 0$  ;
- si  $c \subset \partial_{\chi < 0} M$  est une courbe simple compacte et n'est librement homotope à aucune des feuilles de  $L^0$ , alors la suite  $l_{s_n}(c)$  est minorée par un nombre strictement positif (qui dépend de  $c$ ).

*Démonstration.* cf. [BoO, Lemme 15]. □

Il découlera de la continuité de  $b_{\mathcal{R}}$  que  $L^0$  est en fait la réunion des feuilles de  $\lambda'$  dont le poids vaut  $\pi$ . Pour le moment, nous allons nous contenter de montrer que  $L^0$  n'intersecte pas  $|\dot{\lambda}|$  transversalement.

**Affirmation 4.5.2.** *La multi-courbe  $L^0$  n'intersecte pas  $|\dot{\lambda}|$  transversalement.*

*Démonstration.* Nous allons suivre [BoO, lemme 16]. Soit  $c$  une composante connexe de  $L^0$  ; notons  $\lambda'$  le représentant de  $\dot{\lambda}$  qui appartient à  $\mathcal{P}(M)$ . Si  $c$  intersecte  $|\dot{\lambda}|$  transversalement alors pour  $n$  assez grand,  $i(c, \lambda_n) \geq \frac{1}{2}i(c, \lambda')$  (cf. affirmation 3.3.2). On en déduit que  $c$  n'est pas librement homotope à une feuille de  $\lambda_n$ , en particulier  $c$  n'est pas homotope à une pointe de  $s_n$ . De ce fait  $c$  est librement homotope à un géodésique simple compacte de  $s_n$  et, quitte à extraire une sous-suite,  $l_{s_n}(c) \rightarrow 0$ . La géodésique  $c$  est l'âme d'un tube de Margulis de  $\partial M$  et  $\lambda_n$  traverse ce tube de plus en plus large. Comme  $i(c, \lambda_n) \geq \frac{1}{2}i(c, \lambda') > 0$ , il s'en suit que  $l_{s_n}(\lambda_n) \rightarrow \infty$ , ce qui contredit le lemme 4.1.1. □

Soit  $c$  une composante de  $L^0$ . Comme  $c$  n'intersecte pas  $\dot{\lambda} \in \mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$ ,  $c$  représente un élément non trivial  $i_*(c)$  de  $\pi_1(M)$ . Comme  $\rho_n$  converge vers  $\rho_\infty$  et que  $l_{\sigma_n}(c) \leq l_{s_n}(c) \rightarrow 0$ , alors  $\rho_\infty \circ i_*(c)$  est une isométrie parabolique.

Comme  $\dot{\lambda}_n$  converge vers  $\dot{\lambda}$ , quitte à extraire une sous-suite, la multi-courbe  $\lambda^{(p)} \subset L^0$  formée par la réunion des feuilles compactes de  $\lambda_n$  dont le poids vaut  $\pi$  ne dépend pas de  $n$ . Soit  $h_n : M - \lambda^{(p)} \rightarrow N(\rho_n)$  un homéomorphisme associé à  $\sigma_n$  ; l'application  $f_n = h_n \circ i : \partial_{\chi < 0} M - \lambda^{(p)} \rightarrow \mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$  est une surface plissée convexe et sa lamination géodésique mesurée de plissage est  $\lambda_n - \lambda^{(p)}$ . Nous allons montrer que cette suite de surfaces plissées tend vers une surface plissée  $f_\infty : \partial M - L^0 \rightarrow M_\infty$ . Comme dans [BoO], nous verrons que l'image de  $f_\infty$  est  $\partial N(\rho_\infty)$  et nous utiliserons un argument d'homologie pour en déduire que  $\rho_\infty$  est géométriquement finie.

Soit  $S$  une composante connexe de  $\partial_{\chi < 0} M - L^0$  ; notons  $\hat{S}$  le revêtement universel de  $S$ . Étant donnée une isométrie entre  $\hat{S}$  munie de la métrique relevée de  $s_n$  et une partie de  $\mathbb{H}^2$ , les transformations de revêtement nous fournissent une représentation  $r_n : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  associée à  $s_n$ . Nous dirons que les restrictions  $s_n^S$  de  $s_n$  à  $S$  convergent algébriquement si on peut choisir des représentations  $r_n$  associées aux  $s_n^S$  qui convergent algébriquement.

**Lemme 4.5.3.** *La suite  $(s_n^S)$  contient une sous-suite qui converge algébriquement.*

*Démonstration.* Supposons le contraire ; d'après la définition de  $L^0$ ,  $l_{s_n}(\bar{S} - S) \rightarrow 0$ , on peut donc utiliser la théorie de [MoS1]. D'après [MoS1] et [MoO] une suite extraite de  $(s_n^S)$  tend vers une lamination géodésique  $\Lambda$ -mesurée  $\mathcal{L}$ . Comme  $l_{s_n}(\lambda_n)$  est bornée, alors d'après le théorème B.1,  $|\dot{\lambda}|$  n'intersecte pas  $|\mathcal{L}|$  transversalement.

**Affirmation 4.5.4.** *Le support de  $\mathcal{L}$  est une multi-courbe.*

*Démonstration.* Supposons tout d'abord que  $|\mathcal{L}|$  contient un minimal exceptionnel. Soit  $\eta > 0$ ; comme  $|\lambda|$  n'intersecte pas  $|\mathcal{L}|$  transversalement, il existe une courbe simple compacte  $c_\eta$  telle que  $i(\lambda', c_\eta) \leq \eta$  et que  $\delta_{\mathcal{L}}(c_\eta) > 0$ . D'après l'affirmation 3.3.2, pour  $n$  assez grand  $i(\lambda_n, c_\eta) \leq 2\eta$ , donc d'après le lemme d'approximation des courbes légèrement plissées (lemme A.1),  $\exists K_{2\eta}, A_{2\eta}$  tel que  $l_{s_n}(c_\eta) \leq K_{2\eta}(l_{\sigma_n}(c_\eta^*) + A_{2\eta})$ . Comme  $\delta_{\mathcal{L}}(c_\eta) > 0$ ,  $l_{s_n}(c_\eta) \rightarrow \infty$  donc  $l_{\sigma_n}(c_\eta^*) \rightarrow \infty$ . Comme  $\sigma_n$  converge algébriquement,  $l_{\sigma_n}(c_\eta^*)$  est bornée et le cas étudié ici n'apparaît pas, c'est-à-dire que  $\mathcal{L}$  ne contient pas de minimal exceptionnel.

Soit  $c$  une feuille compacte de  $|\mathcal{L}|$  telle que  $\delta_{\mathcal{L}}(c) > 0$ ; d'après [MoS1]  $l_{s_n}(c) \rightarrow \infty$ . Comme  $|\lambda|$  n'intersecte pas  $|\mathcal{L}|$  transversalement,  $i(c, \lambda') = 0$  et d'après l'affirmation 3.3.2,  $i(c, \lambda_n) \rightarrow 0$ . On déduit alors du lemme d'approximation des courbes légèrement plissées qu'il existe des constantes  $K, A$  telle que pour  $n$  assez grand,  $l_{s_n}(c) \leq K(l_{\sigma_n}(l^{i*}) + A)$ . Ceci fournit la même contradiction que dans le paragraphe précédent, donc pour toute feuille compacte  $c$  de  $\mathcal{L}$ ,  $\delta_{\mathcal{L}}(c) = 0$ .

D'après l'affirmation 1.2.1, ceci entraîne que  $|\mathcal{L}|$  est une multi-courbe.  $\square$

Comme  $|\mathcal{L}| \subset S \subset \partial M - L^0$ ,  $\exists C_2 > 0$  telle que  $l_{s_n}(c) > C_2$  pour tout  $n$  et pour toute composante  $c$  de  $|\mathcal{L}|$ . D'après la construction du  $\Lambda$ -arbre  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ , la suite des restrictions de  $s_n$  à une composante connexe de  $S - |\mathcal{L}|$  est bornée. Il existe donc  $C_1 > 0$  telle que  $\inf\{l_{s_n}(c)/c$  est une géodésique simple compacte de  $S - |\mathcal{L}|\} > C_1$  pour tout  $n$ . Comme  $|\mathcal{L}|$  est une multi-courbe, alors  $\delta_{\mathcal{L}}(|\mathcal{L}|) = 0$ , donc  $l_{s_n}(\mathcal{L})$  est majorée. On en déduit  $\exists C_3 > 0$  telle que, pour tout  $n$ ,  $\inf\{l_{s_n}(c)/c$  intersecte  $\mathcal{L}$  transversalement $\} > C_3$ . Maintenant, nous avons  $\inf\{l_{s_n}(c)/c$  est une géodésique simple compacte de  $S\} > \min\{C_1, C_2, C_3\} > 0$ . On déduit alors du lemme de Mumford (cf. [CEG]) que la suite  $s_n^S$  est bornée dans l'espace modulaire, c'est-à-dire qu'il existe des difféomorphismes  $\psi_n$  tels que la suite  $(\psi_n * s_n^S)$  est bornée pour la topologie algébrique.

Comme la restriction de  $s_n^S$  à chaque composante de  $S - |\mathcal{L}|$  est bornée, on peut supposer que  $\psi_n$  est composé de twists de Dehn le long des feuilles de  $|\mathcal{L}|$ .

**Affirmation 4.5.5.** *Le nombre de tours des twists de Dehn qui composent  $\psi_n$  est borné.*

*Démonstration.* Pour une courbe compacte  $c \in \partial M$  et  $n \in \overline{\mathbb{N}}$  on notera  $\rho_n(c)$  l'élément correspondant de  $\rho_n(\pi_1(M))$ . Soit  $c$  une composante connexe de  $\mathcal{L}$ ; comme  $(\rho_n)$  converge algébriquement,  $\rho_n(c)$  converge vers  $\rho_\infty(c)$ . Montrons que  $\rho_\infty(c)$  n'est pas parabolique. Supposons le contraire, alors  $l_{\sigma_n}(c^*) \rightarrow 0$ . D'après l'affirmation 3.3.2,  $i(\lambda_n, c) \rightarrow 0$ , donc, d'après le lemme d'approximation des courbes légèrement plissées,  $l_{s_n}(c) \rightarrow 0$ . On en déduit que  $c \subset L^0$ , ce qui contredit le fait que  $|\mathcal{L}| \subset S \subset \partial M - L^0$ . Ainsi  $\rho_\infty(c)$  est hyperbolique et quitte à extraire une sous-suite,  $\rho_n(c)$  est aussi hyperbolique.

Supposons que  $\psi_n$  fait  $p_n$  tours le long de  $c$  et que  $p_n \rightarrow \infty$ . Notons  $F^1$  et  $F^2$  les composantes connexes (éventuellement confondues) de  $S - |\mathcal{L}|$  dont le bord contient  $c$ . Comme  $|\mathcal{L}|$  n'intersecte pas  $\lambda'$  transversalement, alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $F^j$  (avec  $j = 1, 2$ ) contient une courbe simple compacte  $b_{j,\varepsilon}$  telle que  $i(b_{j,\varepsilon}, \lambda') \leq \varepsilon$ . On a  $\lambda' \in \mathcal{P}(M)$ , fixons  $\varepsilon < \min\{2\pi, \eta\}$  où  $\eta > 0$  est tel que pour tout anneau essentiel  $E$ ,  $i(\lambda', \partial E) \geq \eta$ . La condition  $c$ ) entraîne que  $i_*(b_{j,\varepsilon}) \in \pi_1(M)$  n'est pas trivial. Fixons un point  $x \in F^1$  et considérons un lacet  $a \ni x$  homotope à  $b_{1,\varepsilon}$  et un lacet  $b \ni x$  homotope à  $b_{2,\varepsilon}$ . Nous sommes dans la situation de la figure 4.4.

Comme la suite  $\psi_n * s_n^S$  est bornée, alors  $l_{s_n^S}(\psi_n(ab))$  est bornée et  $l_{\sigma_n}(\psi_n(ab)^*)$  est aussi bornée. On peut donc extraire une sous-suite telle que  $\rho_n(\psi_n(ab)) = \rho_n(ac^{p_n}bc^{-p_n})$  converge. Comme  $\rho_n(a)$  converge, on en déduit que  $\rho_n(c^{p_n}bc^{-p_n}) = \rho_n(c)^{p_n}\rho_n(b)\rho_n(c)^{-p_n}$  contient une sous-suite convergente.

Soient  $l_n \subset \mathbb{H}^3$  l'axe de  $\rho_n(c)$  et  $x_n \in l_n$  une suite qui converge vers  $x_\infty \in l_\infty$ ; considérons une sous-suite telle que  $\rho_n(c)^{p_n}\rho_n(b)\rho_n(c)^{-p_n}(x_n)$  converge. Comme  $\rho_n(c)$  converge vers  $\rho_\infty(c)$  qui est hyperbolique, alors  $\rho_n(c)^{-p_n}(x_n)$  converge vers un point fixe de  $\rho_n(c)$ . On sait que  $\rho_n(b)$  converge vers  $\rho_\infty(b)$ , que  $\rho_n(c)^{-p_n}(x_n)$  tend vers le bord à l'infini et que

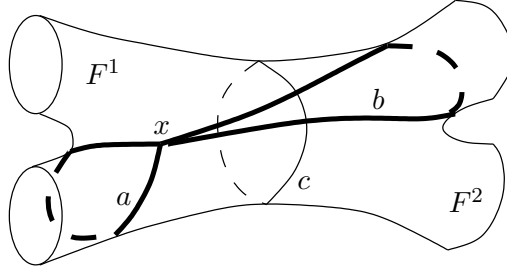


FIG. 4.4 – Contrôle du nombre de twists de Dehn

$d_{\mathbb{H}^3}(\rho_n(c)^{-p_n}(x_n), \rho_n(b)\rho_n(c)^{-p_n}(x_n)) = d_{\mathbb{H}^3}(x_n, \rho_n(c)^{p_n}\rho_n(b)\rho_n(c)^{-p_n}(x_n))$  est bornée. Ceci entraîne que  $\rho_n(c)^{-p_n}(x_n)$  tend vers un point fixe de  $\rho_\infty(b)$ . Les isométries  $\rho_\infty(b)$  et  $\rho_\infty(c)$  ont donc un point fixe commun. Comme  $\rho_\infty(\pi_1(M))$  est un groupe discret,  $\rho_\infty(b)$  et  $\rho_\infty(c)$  sont des multiples du même élément indivisible de  $\rho_\infty(\pi_1(M))$ , i.e. il existe  $d \in \pi_1(M)$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  tel que  $b = d^p$  et  $c = d^q$ . Comme  $b_{2,\varepsilon}$  est librement homotope à  $b$ , on déduit de l'affirmation 2.1.5 que  $b_{2,\varepsilon} \cup c$  borde un anneau essentiel. Comme  $i(\lambda', c \cup b_{2,\varepsilon}) \leq \varepsilon < \eta$ , ceci contredit la condition c).  $\square$

On peut maintenant conclure que, quitte à extraire une sous-suite,  $\exists n_1$  tel que les difféomorphismes  $\psi_n \circ \psi_{n_1}^{-1}$  sont isotopes à l'identité. Ceci achève la preuve du lemme 4.5.3.  $\square$

En utilisant la convergence des métriques sur le bord, nous allons construire une surface plissée convexe  $f_\infty : S \rightarrow \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ .

**Lemme 4.5.6.** *Soit  $S$  une composante connexe de  $\partial M - L^0$ ; alors il existe une surface plissée convexe ou aplatie  $f_\infty : S \rightarrow \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$  qui est homotope à l'inclusion.*

*Démonstration.* Soit  $r_n : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  une représentation associée à  $s_n^S$  telle que  $(r_n)$  converge algébriquement vers une représentation  $r_\infty : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ .

Nous allons suivre les idées de [CEG] afin d'extraire de  $(f_n)$  une sous-suite convergente. Pour cela il nous faut montrer que toutes les images  $f_n(S)$  intersectent l'image dans  $\mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$  d'une partie compacte de  $\mathbb{H}^3$ . Une telle propriété est garantie par le lemme suivant de [BoO]. Notons  $x_n$  l'image dans  $\mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$  de l'origine  $o \in \mathbb{H}^3$ , on a :

**Lemme 4.5.7 ([BoO], lemme 17).** *Un arc  $k_n$ , joignant  $f_n(S)$  au point base  $x_n$ , peut être choisi de longueur uniformément bornée.*

Soit  $\tilde{k}_n$  un relevé de  $k_n$  dont une extrémité est  $o$ ; notons  $y \in \partial C(\rho_n)$  l'autre extrémité de  $\tilde{k}_n$  et  $\partial_y C(\rho_n)$  la composante de  $\partial C(\rho_n)$  qui contient  $y$ . Notons  $S'$  la composante de  $\partial M - \lambda^{(p)}$  qui contient  $S$ ,  $r'_n : \pi_1(S') \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  une représentation associée à  $s_n$  dont la restriction à  $\pi_1(S)$  coïncide avec  $r_n$  et  $\Gamma_n = r'_n(\pi_1(S'))$ . Comme  $r'_n$  est associée à  $s_n$ , on peut identifier  $\mathbb{H}^2/\Gamma_n$  et  $(S', s_n)$ ; choisissons une projection de revêtement  $p_n : \mathbb{H}^2 \rightarrow S'$ . Fixons  $n$  et notons  $\hat{f}_n : \mathbb{H}^2 \rightarrow \partial_y C(\rho_n)$  un revêtement isométrique tel que l'application quotient  $f_n : \mathbb{H}^2/\Gamma_n \rightarrow N(\rho_n)$  coïncide avec  $h_n \circ i : S' \rightarrow N(\rho_n)$  lorsque l'on identifie  $(S', s_n)$  et  $\mathbb{H}^2/\Gamma_n$ . On a alors  $\forall a \in \pi_1(S')$ ,  $\hat{f}_n \circ r'_n(a) = (\rho_n \circ i_*)(a) \circ \hat{f}_n(a)$ .

Notons  $t_n = \rho_n \circ i_* \circ r_n'^{-1}$  et  $t_\infty = \rho_\infty \circ i_* \circ r_\infty^{-1}$ . D'après le théorème d'Ascoli, il existe une suite extraite telle que  $(\hat{f}_n)$  converge uniformément sur tout compact vers une application  $\hat{f}_\infty : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ . D'après [CEG],  $\hat{f}_\infty$  est une surface plissée. Comme  $l_{s_n}(S - S) \rightarrow 0$ ,  $(\Gamma_n)$  converge géométriquement vers  $r_\infty(\pi_1(S))$ . Il s'en suit qu'une suite  $(b_n)$  avec  $b_n \in \Gamma_n$  converge si et seulement s'il existe  $a \in \pi_1(S)$  tel que  $b_n = r'_n(a)$ . On a alors  $b_n \rightarrow r_\infty(a)$  et  $t_n(b_n) = \rho_n \circ i_*(a) \rightarrow \rho_\infty \circ i_*(a) = t_\infty(r_\infty(a))$ . On en déduit que la suite de surfaces plissées convexes  $(\hat{f}_n, \Gamma_n, t_n)$  converge vers la surface plissée  $(\hat{f}_\infty, r_\infty(\pi_1(S)), t_\infty)$ . D'après le lemme 3.1.1,

$\hat{f}_\infty$  est une surface plissée convexe ou aplatie. Comme  $r_\infty(a) = \rho_\infty \circ i_*(a)$  pour tout  $a \in \pi_1(S)$ , l'application quotient  $f_\infty : \mathbb{H}^2/r_\infty(\pi_1(S)) \approx S \rightarrow \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$  est homotope à l'inclusion.  $\square$

Montrons ensuite que  $C_{\hat{f}_\infty}$  contient l'enveloppe convexe  $C(\rho_\infty)$  de  $L_{\rho_\infty}$ .

**Affirmation 4.5.8.** *L'ensemble  $C(\rho_\infty)$  est contenu dans  $C_{\hat{f}_\infty}$ .*

*Démonstration.* Soient  $\Pi_\infty$  un plan de support pour  $\hat{f}_\infty$  et  $(\Pi_n)$  un plan de support pour  $\hat{f}_n$  tel que  $(\Pi_n)$  converge vers  $\Pi_\infty$ . Le bord de l'adhérence  $\bar{\Pi}_n \subset \bar{\mathbb{H}}^3$  de chaque  $\Pi_n$  est un cercle et ce cercle borde un disque  $D_n \supset L_{\rho_n}$ . Le bord de  $\bar{\Pi}_\infty$  borde un disque  $D_\infty \subset \partial\bar{\mathbb{H}}^3$  qui est la limite des  $D_n$ . Montrons que  $L_{\rho_\infty} \subset D_\infty$ . Soit  $w \in L_{\rho_\infty}$ ; comme les points fixes des isométries hyperboliques sont denses dans  $L_{\rho_\infty}$ , on peut supposer que  $w$  est le point fixe attractif d'une isométrie hyperbolique  $\rho_\infty(a)$ . Comme  $(\rho_n)$  converge algébriquement, alors les points fixes attractifs  $w_n$  de  $\rho_n(a)$  convergent vers  $w$ . Comme  $w_n \in L_{\rho_n} \subset D_n$  et comme  $D_n$  converge vers  $D_\infty$ , alors  $w \in D_\infty$ . Ainsi  $L_{\rho_\infty} \subset D_\infty$  et  $C(\rho_\infty) \subset H_{\Pi_\infty}^+$ . On conclut la preuve de l'affirmation 4.5.8 en faisant de même pour tous les plans de support de  $\hat{f}_n$ .  $\square$

Comme  $\hat{f}_\infty$  est une surface plissée,  $\hat{f}_\infty(\mathbb{H}^2) \subset C(\rho_\infty)$ . L'affirmation ci-dessus entraîne donc que  $\hat{f}_\infty(\mathbb{H}^2)$  est contenue dans une composante connexe  $\partial_i C(\rho_\infty)$  de  $\partial C(\rho_\infty)$ .

**Affirmation 4.5.9.** *L'application  $\hat{f}_\infty : \mathbb{H}^2 \rightarrow \partial_i C(\rho_\infty)$  est un revêtement.*

*Démonstration.* D'après [EpM], si  $\hat{f}_\infty$  n'est pas un revêtement, alors  $\text{int}(C_{\hat{f}_\infty}) = \emptyset$ . On déduit donc de l'affirmation 4.5.8 que si  $\hat{f}_\infty$  n'est pas un revêtement,  $\text{int}(C(\rho_\infty)) = \emptyset$ . Ceci entraîne que  $M$  est un fibré en intervalles  $I \times \Sigma$  sur une surface  $\Sigma$ . Pour  $n \in \bar{\mathbb{N}}$ , notons  $\hat{\lambda}_n$  la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\hat{f}_n$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a alors  $p_n(\hat{\lambda}_n) = \lambda_n$ . D'après le lemme 3.1.3,  $\hat{\lambda}_n$  tend vers une lamination géodésique mesurée  $\hat{\lambda}_\infty$  dont le support est le lieu de plissage de  $\hat{f}_\infty$ . De la convergence géométrique de  $\Gamma_n$  vers  $r_\infty(\pi_1(S))$  on déduit que  $(p_n)$  converge sur tout compact vers une application  $p_\infty : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$ . De ce fait  $p_n(\hat{\lambda}_n) = \lambda_n$  tend vers  $p_\infty(\hat{\lambda}_\infty)$ . Comme  $\hat{\lambda}_n$  converge vers  $\hat{\lambda}$ , on a alors  $\lambda' \cap S = p_\infty(\hat{\lambda}_\infty)$ . Qui plus est, d'après le lemme 3.1.7,  $|p_\infty(\hat{\lambda}_\infty)|$  est une section du fibré  $I \times \partial\Sigma$ . Si  $\Sigma$  est un pantalon, ceci contredit la condition d). Dans le cas contraire, notons  $c \subset \Sigma$  une courbe simple compacte qui n'est pas librement homotope à une composante de  $\partial\Sigma$ ; alors  $I \times c \subset I \times \Sigma$  est un anneau essentiel et  $i(\lambda, \partial I \times c) = 0$  pour tout représentant  $\lambda$  de  $\hat{\lambda}$ , ce qui contredit la condition b). Finalement, on a montré que si  $\hat{f}_\infty$  n'est pas un revêtement,  $\hat{\lambda}$  n'appartient pas à  $\mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$ .  $\square$

L'application quotient  $f_\infty$  est donc un revêtement. D'après la remarque qui suit la preuve du lemme 3.5.2, toutes les hypothèses du lemme 3.5.2 sont ici réunies à savoir qu'on a une suite de surfaces plissées  $(\hat{f}_n, \Gamma_n, r_n)$  qui converge vers une surface plissée  $(\hat{f}_\infty, \Gamma_\infty, r_\infty)$  et que  $\text{int}(C_{\hat{f}_\infty}) \supset \text{int}(C(\rho_\infty)) \neq \emptyset$ . On peut donc utiliser ce lemme ici et en déduire que  $f_\infty : S \rightarrow \partial_i N(\rho_\infty)$  est un homéomorphisme.

Faisons la même construction pour chaque composante de  $\partial_{\chi < 0} M - L_0$  et notons  $f_\infty : \partial_{\chi < 0} M - \partial N(\rho_\infty)$  l'application ainsi obtenue. D'après ce qui précède, l'image de  $f_\infty$  est la réunion de certaines composantes de  $\partial N(\rho_\infty)$  et  $f_\infty$  est un homéomorphisme local.

**Affirmation 4.5.10.** *L'application  $f_\infty : \partial_{\chi < 0} M - L^0 \rightarrow \partial N(\rho_\infty)$  est injective.*

*Démonstration.* Supposons le contraire; on a montré plus haut que la restriction de  $f_\infty$  à chaque composante de  $\partial_{\chi < 0} M - L_0$  est un homéomorphisme sur son image, il existe donc deux composantes connexes  $S$  et  $S'$  de  $\partial_{\chi < 0} M - L_0$  telles que  $f_\infty(S) \cap f_\infty(S') \neq \emptyset$ ; pour éviter les confusion notons  $f'_\infty$  la restriction de  $f_\infty$  à  $S'$ . Notons  $\hat{S}$  et  $\hat{S}'$  les revêtements universels de  $S$  et  $S'$ , choisissons des relevés  $\hat{f}_\infty : \mathbb{H}^2 = \hat{S} \rightarrow C(\rho_\infty)$  et  $\hat{f}'_\infty : \mathbb{H}^2 = \hat{S}' \rightarrow C(\rho_\infty)$  qui s'intersectent et des

relevés  $\hat{f}_n : \mathbb{H}^2 \rightarrow C(\rho_n)$  de  $f_n|_S$  (resp. des relevés  $\hat{f}'_n : \mathbb{H}^2 \rightarrow C(\rho_n)$  de  $f_n|_{S'}$ ) qui convergent vers  $\hat{f}_\infty$  (resp.  $\hat{f}'_\infty$ ). On a alors  $\hat{f}_n(\mathbb{H}^2) \subset \text{int}(C_{\hat{f}_n})$ ,  $\hat{f}'_n(\mathbb{H}^2) \subset \text{int}(C_{\hat{f}'_n})$  et  $\hat{f}_\infty(\mathbb{H}^2) \cap \hat{f}'_\infty(\mathbb{H}^2) \neq \emptyset$ . On en déduit que  $\hat{f}_\infty(\mathbb{H}^2) = \hat{f}'_\infty(\mathbb{H}^2)$  est contenu dans un plan totalement géodésique; on a alors  $f_\infty(S) = f'_\infty(S')$ . Soit  $c \subset S$  une courbe simple compacte qui n'intersecte pas le lieu de plissage de  $f_\infty$ ; notons  $c' = f'^{-1}_\infty(f_\infty(c))$ . On déduit du lemme 3.1.3 que  $i(c, \lambda_n) \rightarrow 0$  et que  $i(c', \lambda_n) \rightarrow 0$  ce qui entraîne que  $i(c, \lambda') = i(c', \lambda') = 0$ . Comme  $f_\infty$  et  $f'_\infty$  sont homotopes à l'inclusion, alors  $c$  et  $c'$  sont librement homotopes dans  $M$ . D'après [ShW],  $c \cup c'$  borde un anneau  $E$  et  $i(\partial E, \lambda') = 0$ , ce qui contredit la condition b).  $\square$

On peut maintenant montrer, en suivant [BoO], que  $\rho_\infty$  est géométriquement finie et est associée à une métrique hyperbolique complète sur  $\text{int}(M)$ .

**Lemme 4.5.11.** *Il existe une métrique géométriquement finie  $\sigma_\infty$  sur  $\text{int}(M)$  telle que  $\rho_\infty$  est une représentation associée à  $\sigma_\infty$ .*

*Démonstration.* A chaque feuille  $c$  de  $L^0$  correspondent deux bouts de  $\partial_{\chi < 0}M - L^0$ . Les images de ces deux bouts par  $f_\infty$  sont deux anneaux totalement géodésiques et non compacts qui sont contenus dans une pointe de  $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ . Otons ces deux anneaux de  $f_\infty(\partial_{\chi < 0}M - L^0)$  et joignons les deux composantes du bord de la surface restante par un anneau compact. En opérant de la sorte pour chaque feuille de  $L^0$ , on obtient une surface compacte  $F_\infty \subset \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ . La même construction effectuée dans  $M$  produit une surface  $S_\infty$  telle que  $S_\infty \cup \partial_{\chi=0}M$  borde une partie compacte de  $M$ . Notons  $F'_\infty$  la surface obtenue en ajoutant à  $F_\infty$  le bord d'un voisinage des pointes de rang 2 de  $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ ; en modifiant  $f_\infty$ , on obtient un homéomorphisme  $f : S_\infty \cup \partial_{\chi=0}M \rightarrow F'_\infty$  qui est homotope à l'inclusion. Il s'en suit que  $F'_\infty$  est homologue à 0 et donc borde un 3-cycle de volume fini. Chaque composante de  $F'_\infty - F_\infty$  borde une pointe de rang 2, comme une telle pointe a un volume fini,  $F_\infty$  borde un 3-cycle de volume fini. La surface  $f_\infty(\partial_{\chi < 0}M - L^0) - F_\infty$  est formée de l'union pour chaque composante  $c$  de  $L^0$  de deux anneaux totalement géodésiques, ces deux anneaux sont connectés par un anneau compact contenu dans  $F_\infty$  et la surface  $a_c$  réunion des deux anneaux non compacts et de l'anneau compact borde un 3-cycle de volume fini. En ajoutant au cocycle bordé par  $F_\infty$  les cocycles bordés par les  $a_c$  correspondant à toutes les composantes de  $L^0$  on obtient un 3-cycle de volume fini  $C_\infty$  bordé par  $f_\infty(\partial_{\chi < 0}M - L^0)$ .

D'après l'affirmation 4.5.10,  $f_\infty$  est un homéomorphisme et son image est la réunion de certaines composantes connexes de  $\partial N(\rho_\infty)$ . Si une composante  $\partial_i N(\rho_\infty)$  de  $\partial N(\rho_\infty)$  n'était pas contenue dans  $f_\infty(\partial_{\chi < 0}M - L^0)$ , alors la composante  $b$  de  $[\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))] - N(\rho_\infty)$  bordée par  $\partial_i N(\rho_\infty)$  serait contenue dans  $C_\infty$ . Comme  $b$  est une composante de  $[\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))] - N(\rho_\infty)$ , c'est un bout géométriquement fini et il a un volume infini. Ceci contredit le fait que  $C_\infty$  a un volume fini. On en déduit que  $f_\infty(\partial_{\chi < 0}M - L^0) = \partial N(\rho_\infty)$ , donc  $C_\infty = N(\rho_\infty)$  et  $\rho_\infty$  est géométriquement finie.

Comme l'homéomorphisme  $f_\infty : \partial_{\chi < 0}M - L^0 \rightarrow \partial N(\rho_\infty)$  est homotope à l'identité, il existe une équivalence d'homotopie  $M - (L^0 \cup \partial_{\chi=0}M) \rightarrow N(\rho_\infty)$  qui coïncide avec  $f_\infty$  sur  $\partial_{\chi < 0}M - L^0$ . D'après [Wa3], cette équivalence d'homotopie peut être réalisée par un homéomorphisme. En composant cet homéomorphisme avec un homéomorphisme  $\text{int}(N(\rho_\infty)) \rightarrow \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ , on obtient la métrique géométriquement finie  $\sigma_\infty$  sur  $\text{int}(M)$  qui était attendue.  $\square$

## 4.6 Convergence de $(\sigma_n)$ vers $\sigma_\infty$

Afin de conclure que  $b_{\mathcal{R}}$  est propre, il nous reste à montrer qu'une sous-suite de  $(\sigma_n)$  converge vers  $\sigma_\infty$ . Nous allons tout d'abord montrer que, quitte à extraire une sous-suite,  $\rho_n(\pi_1(M))$  converge fortement vers  $\rho_\infty(\pi_1(M))$ . Notons  $\Omega(\rho_n)$  le domaine de discontinuité de  $\rho_n(\pi_1(M))$ ; nous allons utiliser le résultat suivant de [JoM] (voir aussi [MaT]) :

**Théorème 4.5.** *Supposons que  $\Omega(\rho_\infty)$  n'est pas vide ; si  $(\Omega(\rho_n))$  converge vers  $\Omega(\rho_\infty)$  au sens de Carathéodory, alors  $\rho_n$  converge fortement vers  $\rho_\infty$ .*

Rappelons que  $(\Omega(\rho_n))$  converge vers  $\Omega(\rho_\infty)$  au sens de Carathéodory si et seulement si  $(\Omega(\rho_n))$  satisfait les deux conditions suivantes :

- tout compact  $K$  contenu dans  $\Omega(\rho_\infty)$  est contenu dans tous les  $\Omega(\rho_n)$  pour  $n$  assez grand ;
- tout ouvert  $O$  contenu dans  $\Omega(\rho_n)$  pour un nombre infini de  $n$  est contenu dans  $\Omega(\rho_\infty)$ .

Nous allons montrer que  $(\Omega(\rho_n))$  et  $\Omega(\rho_\infty)$  satisfont ces deux conditions.

**Lemme 4.6.1.** *Sous les hypothèses de la proposition 4.1 il existe une suite extraite de  $(\rho_n)$  qui converge fortement vers  $\rho_\infty$ .*

*Démonstration.* Comme  $\rho_\infty$  est géométriquement finie,  $\Omega(\rho_\infty)$  n'est pas vide.

Soient  $K \subset \Omega(\rho_\infty)$  un sous-ensemble compact connexe et  $\Omega(\rho_\infty)_1$  la composante connexe de  $\Omega(\rho_\infty)$  qui contient  $K$ . Notons  $\tilde{\Sigma}_1 \subset \partial\tilde{N}(\rho_\infty)$  et  $K' \subset \tilde{\Sigma}_1$  les images de  $\Omega(\rho_\infty)_1$  et de  $K$  par l'application de rétraction  $\Omega(\rho_\infty)_1 \rightarrow \partial\mathcal{C}(\rho_\infty)$ . Comme dans les sections précédentes, notons  $\hat{\lambda}_n$  la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\hat{f}_n$  et extrayons une suite telle que  $|\hat{\lambda}_n|$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $\hat{L} \subset \mathbb{H}^2$ . Considérons une famille de points  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_\infty \in \mathbb{H}^2 - \hat{L}$  telle que chaque composante de  $\mathbb{H}^2 - \hat{L}$  contient un  $\hat{x}_i$  et notons  $\Pi_i$  le plan de support en  $\hat{f}_\infty(\hat{x}_i)$ . Le bord dans  $\partial\overline{\mathbb{H}^3}$  de  $\Pi_i$  borde un disque  $D_i \subset \partial\overline{\mathbb{H}^3}$  tel que  $\text{int}(D_i) \subset \Omega(\rho_\infty)$  et on a  $\Omega(\rho_\infty) = \bigcup_i \text{int}(D_i)$ . Soit  $i \in \mathbb{N}$ ; pour  $n$  assez grand,  $\hat{x}_i \in \mathbb{H}^2 - |\hat{\lambda}_n|$ , notons  $\Pi_{i,n}$  le plan de support en  $\hat{f}_n(\hat{x}_i)$ . Le bord dans  $\partial\overline{\mathbb{H}^3}$  de  $\Pi_{i,n}$  borde un disque  $D_{i,n} \subset \partial\overline{\mathbb{H}^3}$  tel que  $\text{int}(D_{i,n}) \subset \Omega(\rho_n)$  et on a  $\Omega(\rho_n) = \bigcup_i \text{int}(D_{i,n})$ .

Comme  $(\hat{f}_n)$  converge vers  $\hat{f}_\infty$  alors, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $(D_{i,n})$  converge vers  $D_i$  pour la topologie de Hausdorff. Comme  $K$  est un compact contenu dans  $\Omega(\rho_\infty)$ , il est recouvert par un nombre fini de compacts  $K_j$  tels que chaque  $K_j$  est contenu dans l'intérieur d'un  $D_i$ . Pour  $n$  assez grand, chaque  $K_j$  est contenu dans l'intérieur du  $D_{i,n}$  correspondant, donc  $K$  est contenu dans  $\Omega(\rho_n)$ .

Soient  $O$  un ouvert contenu dans  $\Omega(\rho_n)$  pour une infinité de valeurs de  $n$  et  $w \in O \cap L_{\rho_\infty}$ . D'après la convergence algébrique de  $(\rho_n)$ , il existe une suite de points  $(w_n)$  qui converge vers  $w$  et est telle que  $w_n \in L_{\rho_n}$  (cf. preuve de l'affirmation 4.5.8). Pour  $n$  assez grand,  $w_n \subset O \cap L_{\rho_n}$ , ce qui contredit notre hypothèse que  $O \subset \Omega(\rho_n)$  pour une infinité de valeurs de  $n$ . Le lemme 4.6.1 est ainsi prouvé.  $\square$

Pour  $n \in \overline{\mathbb{N}}$  notons toujours  $M_n = \mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M)) \approx \text{int}(M)$ ,  $x_n \in M_n$  la projection de l'origine  $o \in \mathbb{H}^3$  et considérons un homéomorphisme  $h_n : M - (\lambda_n^{(p)} \cup \partial_{\chi=0}M) \rightarrow N(\rho_n)$  associé à  $\sigma_n$ .

Comme  $\rho_n(\pi_1(M))$  converge fortement vers  $\rho_\infty(\pi_1(M))$ , il existe des suites de réels  $k_n \rightarrow 1$  et  $r_n \rightarrow \infty$  et une suite d'applications  $\tilde{u}_n : B(o, r_n) \subset \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  qui ont les propriétés suivantes (cf. [BeP] par exemple) :

- l'application  $\tilde{u}_n$  est un homéomorphisme  $k_n$ -bilipschitz sur son image,  $u_n(o) = o$  et  $\tilde{u}_n$  converge vers l'identité sur tout compact ;
- l'application  $\tilde{u}_n$  est équivariante, c'est-à-dire que pour tout  $x \in B(o, r_n)$  et  $a \in \pi_1(M)$  tels que  $\rho_\infty(a)(x) \in B(o, r_n)$ ,  $u_n \circ \rho_\infty(a)(x) = \rho_n(a) \circ u_n(x)$ .

De cette deuxième propriété, on déduit que  $\tilde{u}_n$  passe au quotient en une application  $u_n : B(x_\infty, r_n) \subset M_\infty \rightarrow M_n$  qui est également un difféomorphisme  $k_n$ -bilipschitz sur son image.

Comme  $M_\infty$  est géométriquement finie, pour  $r_n$  assez grand,  $B(x_\infty, r_n) \subset M_\infty$  est homéomorphe à  $M$  et l'inclusion  $B(x_\infty, r_n) \subset M_\infty \approx \text{int}(M)$  est une équivalence d'homotopie. On en déduit que  $u_n(B(x_\infty, r_n))$  est homéomorphe à  $M$ . Comme  $\tilde{u}_n$  est équivariante, l'inclusion

$u_n(B(x_\infty, r_n)) \subset M_n \approx \text{int}(M)$  est une équivalence d'homotopie. D'après un résultat de [MMS],  $M - \text{int}(B(x_\infty, r_n))$  et  $M - u_n(B(x_\infty, r_n))$  sont homéomorphes à  $\partial M \times [0, 1]$  et on peut étendre  $u_n : B(x_\infty, r_n) \subset \text{int}(M) \rightarrow \text{int}(M)$  en un homéomorphisme  $v_n : M \rightarrow M$  qui est homotope à l'identité. Pour montrer que  $(\sigma_n)$  converge vers  $\sigma_\infty$ , il nous reste à montrer que les  $v_n$  sont isotopes à l'identité.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , comme l'application  $f_n : \partial_{\chi < 0} M - L^0 \rightarrow \partial N(\rho_n) \subset M_n \approx \text{int}(M)$  est la restriction d'un homéomorphisme  $h_n$  associé à  $\rho_n$ , elle est isotope à l'inclusion  $\partial_{\chi < 0} M - L^0 \rightarrow M$ . Comme  $u_n$  est  $k_n$ -bilipschitz, alors pour  $n$  assez grand,  $u_n(B(x_\infty, r_n))$  contient  $B(x_n, r_n - 1)$ . Soit  $S$  une composante de  $\partial_{\chi < 0} M - L^0$ ; d'après les lemmes 4.5.3 et 4.5.7, pour  $n$  assez grand, la partie épaisse de  $f_n(S)$  est contenue dans  $B(x_n, r_n - 1) \subset u_n(B(x_\infty, r_n))$ . On a montré dans la preuve du lemme 4.5.6 que  $f_n : S \rightarrow \partial N(\rho_n)$  converge vers  $f_\infty : S \rightarrow \partial N(\rho_\infty)$  et on sait que  $\tilde{u}_n$  converge vers l'identité sur tout compact. On en déduit que  $u_n^{-1} \circ f_n = v_n^{-1} \circ f_n$  converge vers  $f_\infty$  sur tout compact; donc, pour  $n$  assez grand, les restrictions de  $v_n^{-1} \circ f_n$  et de  $f_\infty$  à  $S$  sont isotopes. Comme  $f_n$  et  $f_\infty$  sont isotopes à l'inclusion  $S \rightarrow M$ , la restriction de  $v_n$  à  $S \subset \partial M$  est isotope à l'inclusion  $S \rightarrow M$ .

Soit  $\mathcal{V}(L^0)$  un voisinage annulaire de  $L^0$ ; comme  $\dot{\lambda} \in \mathcal{P}^+(M)/\mathcal{R}$  et comme  $L^0$  n'intersectent pas  $|\dot{\lambda}|$  transversalement,  $\mathcal{V}(L^0) \cup \partial_{\chi=0} M$  ne contient ni disques ni anneaux essentiels. On a montré précédemment que  $v_n$  est homotope à l'identité et que sa restriction à  $\partial_{\chi < 0} M - \mathcal{V}(L^0)$  est isotope à l'inclusion  $\partial_{\chi < 0} M - \mathcal{V}(L^0) \rightarrow M$ . D'après [Joh], ceci entraîne que  $v_n$  est isotope à l'identité, ce qui conclut la preuve de la propriété de  $b_{\mathcal{R}}$ .



# Chapitre 5

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous allons déduire les théorème A et D du théorème C. Nous déduirons ensuite du théorème A que  $\hat{\mathcal{O}}$  et  $\mathcal{O}$  sont connexes par arc.

### 5.1 L'image de $b_{\mathcal{GF}}$

Nous allons maintenant déduire de la propriété de  $b_{\mathcal{GF}}$  (qui découle de celle de  $b_{\mathcal{R}}$ , théorème C) le fait qu'une lamination de  $\mathcal{P}(M)$  est dans l'image de  $b_{\mathcal{GF}}$ .

**Théorème A.** *Soient  $M$  une variété hyperbolique compacte de dimension 3 et  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$  une lamination géodésique mesurée sur son bord. Il existe sur l'intérieur de  $M$  une métrique hyperbolique géométriquement finie non-fuchsienne  $\sigma$  dont  $\lambda$  est la lamination géodésique mesurée de plissage si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :*

- a) toute feuille fermée de  $\lambda$  a un poids inférieur ou égal à  $\pi$  ;
- b)  $\exists \eta > 0$  tel que, pour tout anneau essentiel  $E$ ,  $i(\partial E, \lambda) \geq \eta$  ;
- c)  $i(\lambda, \partial D) > 2\pi$  pour tout disque essentiel  $D$ .

*Démonstration.* On a vu dans la section 3.2 que ces conditions sont nécessaires. Afin de montrer qu'elles sont suffisantes, nous allons utiliser le théorème B et le résultat de [BoO] pour les multicourbes pondérées. Il nous faut tout d'abord montrer que  $\mathcal{P}^+(M)$  est ouvert.

**Affirmation 5.1.1.** *L'ensemble  $\mathcal{P}^+(M)$  muni de la topologie faible\* est ouvert.*

*Démonstration.* Soit  $\lambda \in \mathcal{P}^+(M)$  ; nous allons montrer que pour toute suite  $(\lambda_n)$  convergeant vers  $\lambda$ ,  $\exists N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $\lambda_n \in \mathcal{P}^+(M)$ .

Soit  $\lambda_n \in \mathcal{ML}(\partial M)$  une suite qui converge vers  $\lambda$  ; comme  $\lambda$  satisfait la condition d) alors  $\lambda_n$  la satisfait également pour  $n$  assez grand.

Montrons que pour tout disque essentiel  $D$ , et pour  $n$  assez grand,  $i(\lambda_n, \partial D) > 2\pi$ . Sinon, quitte à extraire, il existe une suite  $D_n$  de disques essentiels tels que  $i(\partial D_n, \lambda_n) \leq 2\pi$ . Si quitte à extraire, la suite  $D_n$  est constante alors il existe un disque essentiel  $D$  tel que  $i(\partial D, \lambda) \leq 2\pi$ , ce qui contredit la condition c). Sinon, quitte à extraire, la suite  $\partial D_n$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $L$  et on a vu dans la démonstration du lemme 4.1.1 que  $L$  contient une feuille homoclinique  $l$  telle que  $i(l, \lambda) \leq 2\pi$ , ce qui contredit la condition c<sub>1</sub>).

Il nous reste à prouver que  $\lambda_n$  satisfait la condition b) pour  $n$  assez grand. Supposons le contraire, c'est-à-dire que quitte à extraire, il existe une suite d'anneaux ou rubans de Möbius essentiels  $a_n$  tels que  $i(\partial a_n, \lambda_n) \rightarrow 0$ . Quitte à extraire,  $\partial a_n$  converge géométriquement vers une lamination géodésique  $A$  qui n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement. D'après l'affirmation 2.4.3,  $A$

est annulaire, ce qui contredit la condition  $b_1$ ). □

Nous pouvons maintenant conclure la preuve du théorème A. Soit  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$  une lamination géodésique mesurée qui satisfait les conditions  $a$ ),  $b$ ) et  $c$ ); considérons une suite de multi-courbes pondérées  $\lambda_n$  qui converge vers  $\lambda$  dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$ . Comme  $\lambda$  satisfait la condition  $a$ ), on peut choisir des multi-courbes pondérées  $\lambda_n$  qui n'ont pas de feuilles de poids supérieur à  $\pi$ . D'après l'affirmation 5.1.1, pour  $n$  assez grand  $\lambda_n \in \mathcal{P}^+(M)$ . Comme on a choisit des  $\lambda_n$  qui satisfont la condition  $a$ ) alors on a  $\lambda_n \in \mathcal{P}(M)$ , en particulier  $\lambda_n$  satisfait les hypothèse du théorème 2 de [BoO]. D'après ce théorème [BoO, théorème 2], il existe une métrique hyperbolique géométriquement finie  $\sigma_n$  sur l'intérieur de  $M$  dont la lamination géodésique mesurée de plissage est  $\lambda_n$ . Comme  $\lambda_n$  converge vers  $\lambda$ , on déduit du théorème B que, quitte à extraire une sous-suite,  $(\sigma_n)$  converge vers une métrique hyperbolique géométriquement finie  $\sigma$  sur l'intérieur de  $M$  et que  $\lambda$  est la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\sigma$ . Ceci achève la preuve du théorème A. □

## 5.2 Discontinuité de l'action de $Mod(M)$ sur $\mathcal{ML}(\partial M)$

Dans cette section, nous allons montrer comment déduire le théorème D des théorèmes A et B.

**Théorème D.** *Si  $M$  n'est pas un bretzel de genre 2, alors  $\mathcal{D}(M)$  est le domaine de discontinuité pour l'action de  $Mod(M)$  sur  $\mathcal{ML}(\partial M)$ .*

*Démonstration.* Rappelons que le domaine de discontinuité pour l'action de  $Mod(M)$  sur  $\mathcal{ML}(\partial M)$  est le plus grand ouvert invariant sur lequel cette action est proprement discontinue. Comme un élément de  $Mod(M)$  envoie les anneaux et disques essentiels sur des anneaux et disques essentiels,  $\mathcal{D}(M)$  est invariant. Nous allons découper la preuve du théorème D en deux parties.

**Lemme 5.2.1.** *Si  $M$  n'est pas un bretzel de genre 2, l'action de  $Mod(M)$  sur  $\mathcal{D}(M)$  est proprement discontinue.*

*Démonstration.* Supposons le contraire, il existe alors  $\lambda \in \mathcal{D}(M)$ ,  $(\lambda_n) \in \mathcal{D}(M)$  et  $(\phi_n) \in Mod(M)$  tels que  $(\lambda_n)$  et  $(\phi_n(\lambda_n))$  convergent vers  $\lambda$  dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$  et que pour tout  $n \neq m$ ,  $\phi_n$  n'est pas isotope à  $\phi_m$ . Comme  $\lambda \in \mathcal{D}(M)$ ,  $\exists \eta > 0$  tel que  $i(\lambda, \partial D) > \eta$  pour tout disque essentiel  $D$ . Soit  $\frac{2\pi}{\eta}\lambda$  la lamination géodésique mesurée obtenue en multipliant la mesure de  $\lambda$  par  $\frac{2\pi}{\eta}$ . Cette lamination géodésique mesurée satisfait les conditions  $b$ ),  $c$ ) et  $d$ ). Soit  $\lambda^i$  une feuille compacte de  $\frac{2\pi}{\eta}\lambda$  dont le poids est supérieur ou égal à  $\pi$ ; si, quitte à extraire une sous-suite,  $\lambda^i$  est une feuille compacte de toutes les laminations géodésiques mesurées  $\lambda_n$ , remplaçons, dans  $\frac{2\pi}{\eta}\lambda$  et dans les  $\frac{2\pi}{\eta}\lambda_n$ ,  $\lambda^i$  par une feuille de poids  $\pi$ . Soient  $\lambda'_\infty$  et  $\lambda'_n$  les laminations géodésiques mesurées obtenues en opérant ainsi pour chaque feuille de  $\frac{2\pi}{\eta}\lambda$  dont le poids est supérieur ou égal à  $\pi$ ; remarquons que  $\lambda'_\infty$  peut avoir des feuilles de poids supérieur à  $\pi$  mais que pour  $n$  assez grand, les feuilles compactes de  $\lambda'_n$  ont un poids inférieur ou égal à  $\pi$ . Remarquons également que les suites  $(\lambda'_n)$  et  $(\phi_n(\lambda'_n))$  convergent vers  $\lambda'_\infty$  dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$ . D'après le lemme 3.4.1,  $\lambda'_\infty$  et  $\lambda'_n$  satisfont les conditions  $b$ ),  $c$ ) et  $d$ ). Pour  $n$  assez grand, les  $\lambda'_n$  satisfont également la condition  $a$ ) donc, d'après le théorème A, il existe une métrique géométriquement finie  $\sigma_n$  dont la lamination géodésique mesurée de plissage est  $(\lambda'_n)$ . La lamination géodésique mesurée de plissage de  $\phi_{n*}(\sigma_n)$  est  $\phi_n(\lambda'_n)$  et par construction  $\phi_n(\lambda'_n) \rightarrow \lambda'_\infty$ . D'après le théorème B, on peut extraire une sous-suite telle que  $(\sigma_n)$  et  $(\phi_{n*}(\sigma_n))$  convergent vers des métriques géométriquement finies.

On peut alors choisir des représentations  $\rho_n : \pi_1(M) \rightarrow Isom(\mathbb{H}^3)$  et  $\phi_{n*} \circ \rho_n$  qui convergent

algébriquement. Un résultat classique nous dit que l'action de  $Mod(M)/Mod_0(M)$  sur l'ensemble  $\{\rho : \pi_1(M) \rightarrow Isom(\mathbb{H}^3) \text{ telle que } \mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M)) \text{ est géométriquement finie et homéomorphe à } int(M)\}$  est proprement discontinue. On en déduit que, quitte à extraire une sous-suite,  $\exists n_0$  tel que  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_n \in Mod_0(M)$ .

Comme  $(\lambda'_n)$  converge vers  $\lambda'_\infty$ , quitte à extraire une sous-suite, la réunion  $\lambda^{(p)}$  des feuilles compactes de  $\lambda'_n$  dont le poids vaut  $\pi$  est indépendante de  $n$ . Comme  $(\phi_n(\lambda'_n))$  converge vers  $\lambda'_\infty$  alors, quitte à extraire une sous-suite,  $(\phi_n(\lambda^{(p)}))$  est indépendante de  $n$ . Quitte à changer  $n_0$  et à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_n(\lambda^{(p)}) = \lambda^{(p)}$  et que  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_n$  laisse chaque composante de  $\partial M - \lambda^{(p)}$  invariante.

Soit  $S$  une composante connexe de  $\partial M - \lambda^{(p)}$ ; notons  $s_n^S$  la métrique hyperbolique induite sur  $S \subset \partial M$  par un homéomorphisme  $h_n : M - (\lambda^{(p)} - \partial_{\chi=0}M) \rightarrow N(\sigma_n)$  associé à  $\sigma_n$ . On a montré dans le chapitre précédent (lemme 4.5.3) que, quitte à extraire une sous-suite, la suite  $(s_n^S)$  converge algébriquement. Comme  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_n(\lambda'_n)$  converge vers  $\phi_{n_0}^{-1}(\lambda'_\infty)$  alors, d'après le chapitre précédent, la suite des métriques  $(\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_n)_* s_n^S$  converge algébriquement. Il est bien connu que  $Mod(S)$  agit proprement discontinuement sur l'espace des classes d'isotopies de métriques hyperboliques complètes sur  $S$ . On en déduit qu'il existe  $n_1$  tel que, quitte à extraire une sous-suite, les restrictions de  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_n$  et de  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_{n_1}$  à  $S \subset \partial M$  sont isotopes.

Les homéomorphismes  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_n$  sont tous homotopes à l'identité, ils sont donc homotopes entre eux. En particulier,  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_n$  est homotope à  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_{n_1}$  pour tout  $n$ . On a vu dans le paragraphe précédent que la restriction de  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_n$  à chaque composante de  $\partial M - \lambda^{(p)}$  est isotope à celle de  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_{n_1}$ . Notons  $\mathcal{V}(\lambda^{(p)})$  un voisinage annulaire de  $\lambda^{(p)}$ , alors comme  $\lambda \in \mathcal{D}(M)$ ,  $(M, \mathcal{V}(\lambda^{(p)}))$  ne contient ni anneaux ni disques essentiels. De [Joh] on déduit alors que  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_n$  est isotope à  $\phi_{n_0}^{-1} \circ \phi_{n_1}$  sur  $M$  tout entier. Ceci contredit notre hypothèse de départ (pour tout  $n \neq m$ ,  $\phi_n$  n'est pas isotope à  $\phi_m$ ) et conclut la preuve du lemme 5.2.1.  $\square$

**Lemme 5.2.2.** *Tout ouvert de  $\mathcal{ML}(\partial M)$  sur lequel  $Mod(M)$  agit proprement discontinuement est contenu dans  $\mathcal{D}(M)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{V} \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  un ouvert de  $\mathcal{ML}(\partial M)$  tel que  $\mathcal{V} \not\subset \mathcal{D}(M)$ . D'après [Mas1], les laminations géodésiques mesurées arationnelles uniquement ergodiques sont denses dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$ ,  $\mathcal{V} - \mathcal{D}(M)$  contient donc une telle lamination géodésique mesurée  $\alpha$ . Comme  $\alpha \notin \mathcal{D}(M)$ , il existe une sous-suite  $(c_n)$  de multi-courbes qui bordent des anneaux ou des disques essentiels et telles que  $i(c_n, \alpha) \rightarrow 0$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $(c_n)$  converge dans  $\mathcal{PML}(\partial M)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  tel que  $(\varepsilon_n c_n)$  converge dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$ . Comme  $i(\varepsilon_n c_n, \alpha) \rightarrow 0$  et comme  $\alpha$  est arationnelle et uniquement ergodique, on peut choisir  $(\varepsilon_n)$  tel que  $(\varepsilon_n c_n)$  tend vers  $\alpha$ . Soit  $\phi_n$  le twist de Dehn le long d'un anneau ou d'un méridien essentiel bordé par  $c_n$ ; alors  $\phi_n(\varepsilon_n c_n) = \varepsilon_n c_n$ . On en déduit que pour tout compact  $\mathcal{K} \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  dont l'intérieur contient  $\alpha$ ,  $\exists n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $\phi_n(\mathcal{K}) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$ . Ceci prouve que  $Mod(M)$  n'agit pas proprement discontinuement sur  $\mathcal{V}$ , et conclut la preuve du lemme 5.2.2.  $\square$

De ces deux lemmes, on conclut que  $\mathcal{D}(M)$  est le plus grand ouvert sur lequel l'action de  $Mod(M)$  est proprement discontinue.  $\square$

### 5.3 Liens entre le domaine de Masur et $\mathcal{D}(M)$ .

Dans cette section, nous allons supposer que  $M$  est un bretzel creux mais n'est pas un bretzel de genre 2. Rappelons la définition du domaine de Masur. Notons  $\partial_e M$  la composante connexe compressible de  $\partial M$ ,  $\mathcal{PML}(\partial_e M)$  l'espace projectif des laminations géodésiques mesurées sur  $\partial_e M$  et  $\mathcal{M}'$  l'adhérence dans  $\mathcal{PML}(\partial_e M)$  de l'ensemble des classes projectives de méridiens

pondérées.

Si  $M$  est un petit bretzel creux (c'est-à-dire que  $M$  est la somme connexe le long du bord de deux fibrés en intervalles sur des surfaces fermées ou d'un fibré en intervalle sur une surface fermée et d'un tore solide) on notera

$$\mathcal{O} = \{\lambda \in \mathcal{PML}(\partial_e M) \mid i(\lambda, \nu) > 0 \text{ pour tout } \nu \in \mathcal{PML}(\partial_e BC) \text{ telle qu'il existe } \mu \in \mathcal{M}' \text{ telle que } i(\mu, \nu) = 0\}.$$

Si  $M$  n'est pas un petit bretzel creux, on notera

$$\mathcal{O} = \{\lambda \in \mathcal{PML}(\partial_e M) \mid i(\lambda, \mu) > 0 \text{ pour tout } \mu \in \mathcal{M}'\}.$$

Cet ensemble  $\mathcal{O}$  est appelé domaine de Masur. Notons  $\hat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{ML}(\partial M)$  l'ensemble des laminations géodésiques mesurées dont la classe projective appartient à  $\mathcal{O}$ . On a :

**Lemme 5.3.1.** *Si  $M$  n'est pas un bretzel de genre 2, alors  $\hat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{D}(M)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\lambda \in \mathcal{ML}(\partial M)$ ; nous allons montrer que si  $\lambda \notin \mathcal{D}(M)$  alors  $\lambda \notin \hat{\mathcal{O}}$ . Pour cela, nous aurons besoin de l'affirmation suivante :

**Affirmation 5.3.2 (voir [Ot1]).** *Soit  $E$  un anneau essentiel dans un grand bretzel creux  $M$ ; alors une sous-lamination géodésique mesurée de  $\partial E$  appartient à  $\mathcal{M}'$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $E$  intersecte un méridien  $c$ ; notons  $\psi : M \rightarrow M$  le twist de Dehn le long de  $E$ . Pour tout  $n$ ,  $\psi^n(c)$  est un méridien et la suite de  $\mathcal{PML}(\partial M)$  obtenue en munissant les  $\psi^n(c)$  de mesures de Dirac converge vers une classe projective  $\mu \in \mathcal{M}'$  telle que  $|\mu| \subset \partial E$ .

Afin de prouver l'affirmation, il ne nous reste plus qu'à montrer que tout anneau essentiel intersecte un méridien. Pour cela, supposons qu'il existe un système admissible de méridiens  $(\Delta_i) \subset M$  qui n'intersecte pas  $E$ ; comme  $M$  est un bretzel creux, au moins une composante de  $\partial E$  appartient au bord extérieur  $\partial_e M$ , notons  $e \subset \partial E$  une telle composante.

Si l'un des  $\Delta_i$ , par exemple  $\Delta_1$ , ne sépare pas  $\partial_e M$  alors il existe une géodésique simple compacte  $d$  qui intersecte  $\partial \Delta_1$  en un point et qui intersecte également  $e$ . Notons  $\mathcal{V} \subset M$  un petit voisinage de  $d \cup \Delta_1$ ,  $\partial \mathcal{V} - \partial M$  est un disque essentiel dont le bord est librement homotope à un méridien qui intersecte  $E$ .

Si chaque  $\Delta_i$  sépare  $M$  alors  $M$  est la somme connexe de fibrés en intervalles sur des surfaces. Comme  $M$  est un grand bretzel creux, il existe une composante  $S$  de  $\partial_e M - \partial \Delta_i$  telle que le bord de l'adhérence de  $S$  possède plusieurs composantes connexes; notons  $\partial \Delta_1$  et  $\partial \Delta_2$  deux de ces composantes connexes. Si  $e \subset S$  alors il existe un arc géodésique  $k \subset S$  joignant  $\partial \Delta_1$  à  $\partial \Delta_2$ , tel que  $\text{int}(k') \cap \Delta_1 \cup \Delta_2 = \emptyset$  et intersectant  $e$ . Notons  $\mathcal{V} \subset M$  un petit voisinage de  $k \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$ ; la composante de  $\partial \mathcal{V} - \partial M$  qui intersecte  $e$  est un disque essentiel dont le bord est librement homotope à un méridien qui intersecte  $E$ . Si  $e \not\subset S$ , il existe  $\Delta_i \in \{\Delta_1, \Delta_2\}$  qui sépare  $e$  de  $\Delta_{j \neq i}$ , disons qu'il s'agit de  $\Delta_1$  et notons  $k \subset \partial_e M - S$  un arc géodésique intersectant  $e$  et satisfaisant  $k \cap \Delta_1 \cup \Delta_2 = \partial k \subset \partial \Delta_1$  et  $k' \subset S$  un arc géodésique joignant une composante de  $k \cap \partial \Delta_1$  à  $\partial \Delta_2$  et tel que  $\text{int}(k') \cap \Delta_1 \cup \Delta_2 = \emptyset$  (voir figure 5.1).

Notons  $\mathcal{V}' \subset M$  un petit voisinage de  $k' \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$ , la composante de  $\partial \mathcal{V}' - \partial M$  qui intersecte le voisinage de  $k'$  est un disque essentiel  $\Delta'$  dont le bord est librement homotope à un méridien  $\partial \Delta' \subset S$  qui n'intersecte pas  $k'$ . Notons  $k'' \subset S$  un arc joignant  $\partial \Delta'$  à l'extrémité de  $k$  qui n'est pas une extrémité de  $k'$ . L'arc  $k' \cup k \cup k''$  joint  $\Delta_2$  à  $\Delta'$  et intersecte  $e$ , notons  $\mathcal{V}$  un petit voisinage de  $\Delta_2 \cup k' \cup k \cup k'' \cup \Delta'$ . La composante de  $\partial \mathcal{V} - \partial M$  qui intersecte  $e$  est un disque essentiel dont le bord est librement homotope à un méridien qui intersecte  $E$ .  $\square$

**Remarque.** Si  $E$  est un anneau essentiel dans un petit bretzel creux, alors ou bien  $\partial E$  intersecte un méridien et d'après ce qui précède une sous-lamination géodésique mesurée de  $\partial E$  appartient à  $\mathcal{M}'$ , ou bien  $\partial E$  est disjoint d'un méridien.  $\diamond$

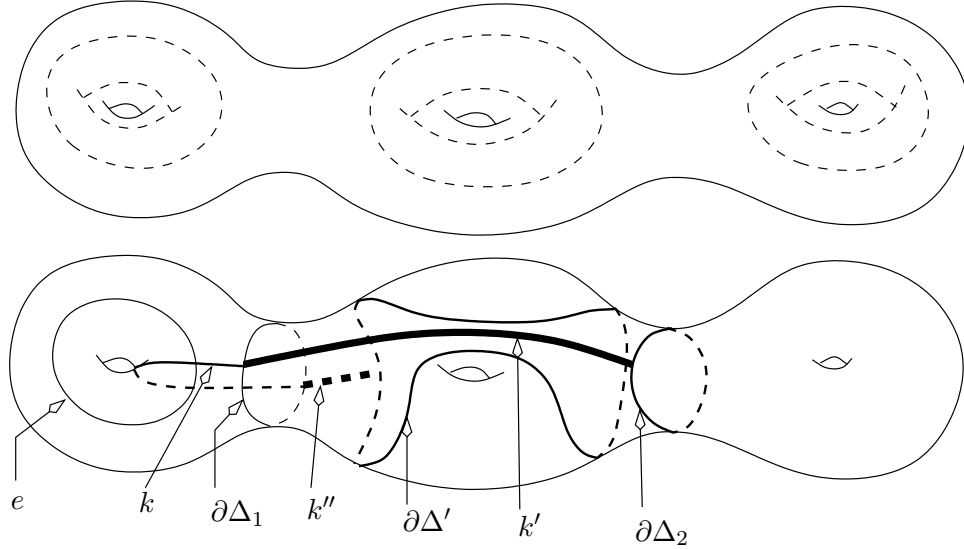


FIG. 5.1 – En haut : un bretzel creux, en bas : son bord extérieur.

Soit  $\lambda$  une lamination géodésique mesurée telle que  $\lambda \notin \mathcal{D}(M)$ , alors il existe une suite  $E_n \subset M$  de disques et d'anneaux essentiels tels que  $i(\lambda, \partial E_n) \rightarrow 0$ . D'après le lemme précédent et la remarque qui le suit, il existe une suite de multi-courbes  $(e_n)$  telle que  $e_n \subset \partial E_n$  et que ou bien  $M$  est un grand bretzel creux et  $e_n \in \mathcal{M}'$  ou bien  $M$  est un petit bretzel creux et  $\exists \mu_n \in \mathcal{M}'$  avec  $i(\mu_n, e_n) = 0$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , notons  $\varepsilon e_n$  la multi-courbe pondérée obtenue en munissant chaque feuille de  $e_n$  d'une masse de Dirac de poids  $\varepsilon$ . Quitte à extraire, il existe une suite  $(\varepsilon_n)$  convergeant vers 0 telle que la suite  $(\varepsilon_n e_n)$  converge dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$  vers une lamination géodésique mesurée  $\alpha$ . Si  $M$  est un grand bretzel creux alors  $\alpha \in \mathcal{M}'$  et, comme  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , on a  $i(\lambda, \alpha) = 0$  donc  $\lambda \notin \hat{\mathcal{O}}$ . Si  $M$  est un petit bretzel creux on peut choisir les  $\mu_n$  de façon qu'une sous-suite  $(\mu_n)$  converge dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$  vers une lamination géodésique mesurée  $\mu \in \mathcal{M}'$ . On a alors  $i(\alpha, \mu) = 0$  et  $i(\alpha, \lambda) = 0$  donc  $\lambda \notin \hat{\mathcal{O}}$ . On a ainsi montré que si  $\lambda \notin \mathcal{D}(M)$ , alors  $\lambda \notin \hat{\mathcal{O}}$ .  $\square$

En guise de réciproque, on peut énoncer le lemme suivant :

**Lemme 5.3.3.** *Soit  $\lambda \in \mathcal{D}(M)$  une lamination arationnelle ; alors la classe projective de  $\lambda$  appartient à  $\mathcal{O}$ .*

*Démonstration.* Supposons le contraire, il existe alors  $\mu \in \mathcal{M}'$  telle que  $i(\mu, \lambda) = 0$ . Comme  $\lambda$  est arationnelle, ceci entraîne que  $\lambda$  et  $\mu$  ont le même support  $|\mu|$ . Comme  $\mu \in \mathcal{M}'$ , il existe une suite de méridiens  $c_n \subset \partial M$  et une suite  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  tels que  $\varepsilon_n c_n$  converge vers  $\mu$  dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$ . Quitte à extraire une sous-suite,  $c_n$  converge pour la topologie de Hausdorff vers une lamination géodésique  $L$ . On a alors  $|\mu| \subset L$ . D'après le critère de Casson (théorème 1.1),  $L$  contient une feuille homoclinique  $l$ . Comme  $|\mu| \subset L$  est le support de  $\lambda$ ,  $l$  n'intersecte pas  $\lambda$  transversalement donc  $i(l, \lambda) = 0$  ce qui contredit la condition  $c_1$ .  $\square$

Un réseau ferroviaire  $\tau$  qui porte une lamination géodésique mesurée est dit complet s'il n'est pas le sous-réseau stricte d'un réseau ferroviaire qui porte une lamination géodésique mesurée (cf. [Pe]).

Toute lamination géodésique mesurée  $\lambda$  est portée par un sous-réseau d'un réseau ferroviaire complet  $\tau$  (qui n'est pas nécessairement unique). Les mesures  $b_i(\lambda)$  des traverses des branches  $b_i$  de  $\tau$  constituent un système de coordonnées pour un simplexe de la variété  $\mathcal{ML}(\partial M)$  qui est une variété linéaire par morceaux. La *profondeur rationnelle* de la lamination géodésique mesurée  $\lambda$  est la dimension de l'espace vectoriel rationnel des fonctions linéaires à coefficients

rationnels (allant du simplexe décrit précédemment dans  $\mathbb{R}$ ) qui s'annulent sur les coordonnées de  $\lambda$ . Nous allons noter  $\mathcal{I}(\partial M)$  l'ensemble des laminations géodésiques mesurées dont la profondeur rationnelle vaut 0 ou 1. Le complémentaire du support d'une lamination géodésique mesurée appartenant à  $\mathcal{I}$  est composé de triangles idéaux et d'au plus un quadrilatère idéal (cf. [Th1]), en particulier une lamination de  $\mathcal{I}$  est arationnelle. L'ensemble  $\mathcal{I}$  est un ouvert dense dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$  (cf. [Th1]). Comme  $\mathcal{I}$  est constitué de laminations arationnelles, on déduit du lemme 5.3.3 que  $\mathcal{D}(M) \cap \mathcal{I} \subset \hat{\mathcal{O}}$ . Ceci va nous permettre de déduire du théorème A que le domaine de Masur est connexe par arcs.

**Proposition 0.2.** *Les ensembles  $\hat{\mathcal{O}}$  et  $\mathcal{O}$  sont connexes par arcs.*

*Démonstration.* Nous allons montrer que  $\hat{\mathcal{O}}$  est connexe par arcs; en projetant sur  $\mathcal{PML}(\partial M)$  on obtient l'intégralité de la proposition.

Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \hat{\mathcal{O}}$ ; comme  $\mathcal{I}$  est dense dans  $\mathcal{ML}(\partial M)$  et que  $\hat{\mathcal{O}}$  est ouvert, il existe  $\alpha_1$  et  $\alpha_2 \in \hat{\mathcal{O}} \cap \mathcal{I}$  telles que  $\lambda_j$  est connectée à  $\alpha_j$  par un arc  $k_j \subset \hat{\mathcal{O}}$ .

D'après le lemme 5.3.1,  $\alpha_j \in \mathcal{D}(M)$  donc il existe  $\eta > 0$  tel que  $i(\alpha_j, \partial E) > \eta$  pour tout disque ou anneau essentiel  $E \subset M$ . Notons  $\frac{2\pi}{\eta}\alpha_j$  la lamination géodésique mesurée obtenue en multipliant la mesure de  $\alpha_j$  par  $\frac{2\pi}{\eta}$ ; on a  $\frac{2\pi}{\eta}\alpha_j \in \mathcal{P}^+(M)$ . Comme  $\alpha_j \in \mathcal{I}$ , son support  $|\alpha_j|$  ne contient pas de feuilles fermées. D'après le théorème A, les laminations géodésiques  $\frac{2\pi}{\eta}\alpha_1$  et  $\frac{2\pi}{\eta}\alpha_2$  appartiennent à  $b(\mathcal{CC}(M))$ . D'après le théorème d'uniformisation double d'Ahlfors-Bers ([Ber]),  $\mathcal{CC}(M)$  est homéomorphe au produit cartésien des espaces de Teichmüller des composantes connexes de  $\partial_{\chi < 0}M$ , en particulier  $\mathcal{CC}(M)$  est connexe par arcs. D'après [KeS],  $b|_{\mathcal{CC}(M)}$  est continue donc  $b(\mathcal{CC}(M))$  est connexe par arc. Il existe donc  $\alpha : [0, 1] \rightarrow b(\mathcal{CC}(M))$  tel que  $\alpha(0) = \frac{2\pi}{\eta}\alpha_1$  et que  $\alpha(1) = \frac{2\pi}{\eta}\alpha_2$ . On a montré dans l'affirmation 5.1.1 que  $\mathcal{P}^+(M)$  est ouvert, on en déduit que  $b(\mathcal{CC}(M))$  est ouvert. On peut donc perturber  $\alpha$  de façon que  $\alpha(t) \in \mathcal{I} \cap b(\mathcal{CC}(M))$  pour tout  $t \in [0, 1]$  (cf. [Th1]); en particulier  $\alpha(t)$  est une lamination géodésique arationnelle contenue dans  $\mathcal{D}(M)$ . On déduit alors du lemme 5.3.3 que  $\alpha(t) \in \hat{\mathcal{O}}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Notons  $\kappa_j : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$  l'arc défini par  $\kappa_j(t) = (1 - t + t\frac{2\pi}{\eta})\alpha_j$ ; la réunion des arcs  $k_j, \kappa_j$  pour  $j = 1, 2$  et de l'arc  $\alpha([0, 1])$  est un arc contenu dans  $\hat{\mathcal{O}}$  joignant  $\lambda_1$  à  $\lambda_2$ .  $\square$

## Annexe A

# Mesure de plissage et longueurs des géodésiques

Dans cet appendice, nous allons montrer le "lemme d'approximation des courbes légèrement plissées" et le "lemme d'approximation des segments légèrement plissés" qui ont été utilisés tout au long de cette thèse.

**Lemme A.1 (Une courbe légèrement plissée est quasi-géodésique).** *Soient  $M$  une variété hyperbolique de dimension 3 dont le bord est une surface plissée convexe,  $\lambda$  la lamination géodésique mesurée de plissage de  $\partial M$ ,  $c$  une géodésique périodique du bord  $\partial M$  qui représente un élément non nul de  $\pi_1(M)$  et  $c^*$  la géodésique de  $M$  dans la classe d'homotopie de  $c$ . Soit  $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ; il existe des constantes  $K_\varepsilon, A_\varepsilon$  telles que si  $i(c, \lambda) \leq \varepsilon$  alors  $l_M(c) \leq K_\varepsilon(l_M(c^*) + A_\varepsilon)$ . De plus, on a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon = 1$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = 0$ .*

*Démonstration.* Pour commencer choisissons une isométrie entre  $\tilde{M}$  et  $\mathbb{H}^3$ , ceci nous fournit une représentation  $\pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ . Pour simplifier les notations, nous identifierons  $\pi_1(M)$  avec son image par cette représentation et nous identifierons  $M$  avec le cœur convexe de  $\pi_1(M)$ . Notons  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  la projection de revêtement.

Pour prouver le lemme A.1 (voir aussi [Se]), nous allons construire, en deux étapes, un anneau simplicial de bord  $c \cup c^*$  et déduire, à chaque étape, de la formule de Gauss-Bonnet, des comparaisons de longueurs. La première étape est le "lemme d'approximation des segments légèrement plissés" :

**Lemme A.2.** *Soient  $\tilde{c}_1$  un segment géodésique de  $\partial \tilde{M}$  joignant deux points  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$  et  $\tilde{c}_2$  le segment géodésique de  $\tilde{M}$  qui les joint également. S'il existe  $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$  tel que  $i(\tilde{c}_1, p^{-1}(\lambda)) \leq \varepsilon$  alors  $\exists K_\varepsilon \leq (1 + \tan \varepsilon)^3$  tel que  $l_M(\tilde{c}_1) \leq K_\varepsilon l_M(\tilde{c}_2)$ .*

*Démonstration.* Remplaçons  $\tilde{c}_1$  par une approximation polyédrale pour laquelle l'angle total de plissage est inférieur à  $(1 + x)\varepsilon < \frac{\pi}{2}$  (l'existence d'une telle approximation est prouvée dans [EpM]). Comme  $\tilde{c}_1$  est la limite de telles approximations, ceci nous permettra de conclure. Désormais  $\tilde{c}_1$  désignera l'approximation sus-citée. Le cône géodésique de  $\tilde{x}_1$  à  $\tilde{c}_1$  (i.e. l'adhérence de l'union des segments géodésiques joignant  $\tilde{x}_1$  aux points de  $\tilde{c}_1$ ) est un disque plissé  $\Delta$  formé d'un nombre fini de triangles totalement géodésiques et bordé par  $\tilde{c}_1 \cup \tilde{c}_2$ . Notons  $\varepsilon_1$  la somme des angles internes de ces triangles en  $\tilde{x}_1$  et  $\varepsilon_2$  l'angle interne du triangle en  $\tilde{x}_2$ . Comme  $\tilde{c}_1$  est une géodésique pour la métrique de  $\partial \tilde{M}$ , en chaque sommet de  $\tilde{c}_1$  la somme des angles internes des triangles est supérieure ou égale à l'angle interne de plissage de  $\partial \tilde{M}$ . En appliquant la formule de Gauss-Bonnet à chacun de ces triangles, on en déduit que l'aire de leur réunion est plus petite que  $(1 + x)\varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ . On a alors  $\varepsilon_1 \leq (1 + x)\varepsilon \leq 2\pi$ , donc le disque  $\Delta$  peut être plongé isométriquement dans  $\mathbb{H}^2$ . On notera désormais  $\Delta$  l'image de ce plongement munie de la

métrique ambiante. La courbe  $\partial\Delta$  est une courbe géodésique par morceaux pour cette métrique et en chaque coin de  $\Delta - \tilde{c}_2$  l'angle externe (qui est compté négativement si l'angle interne est supérieur à  $\pi$ ) est inférieur à l'angle de plissage correspondant.

Soit  $b = \max_{\tilde{x} \in \partial\Delta - \tilde{c}_2} d_{\Delta}(\tilde{x}, \tilde{c}_2)$ ; l'affirmation suivante fournit une majoration de  $b$ .

**Affirmation A.3.** *On a  $chb \leq 1 + \tan((1+x)\varepsilon)$ .*

*Démonstration.* Par convexité de la fonction distance entre deux géodésiques,  $b$  est atteint en un sommet de  $\partial\Delta - \tilde{c}_2$ . Lorsque  $\Delta$  n'est pas convexe, nous allons le remplacer par un convexe dont le bord contient ce sommet.

Soient  $\tilde{y}$  un sommet de  $\Delta$  en lequel l'angle externe est négatif,  $\tilde{y}^+$  et  $\tilde{y}^-$  les deux sommets voisins de  $\tilde{y}$ ; ajoutons à  $\Delta$  le triangle de sommets  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{y}^+$  et  $\tilde{y}^-$ . Le disque  $\Delta'$  ainsi obtenu contient  $\Delta$ , est bordé par un polygone qui possède un sommet de moins que  $\partial\Delta$  et si l'angle externe de  $\Delta$  en  $\tilde{y}^+$  (respectivement  $\tilde{y}^-$ ) était positif alors l'angle externe de  $\Delta'$  en  $\tilde{y}^+$  (respectivement  $\tilde{y}^-$ ) est plus petit que celui de  $\Delta$ . Si ce nouveau disque a un coin en lequel l'angle externe est négatif alors on réitère cette opération.

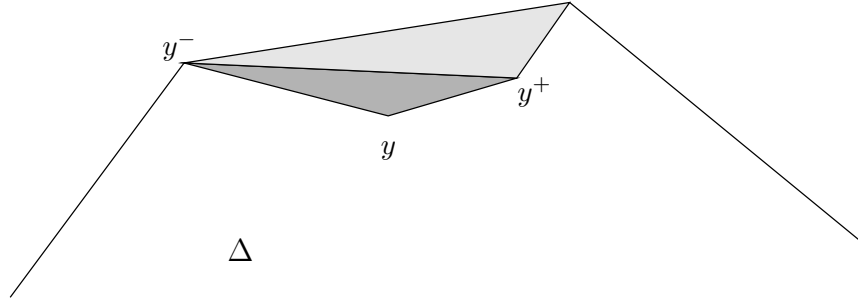


FIG. A.1 – On ajoute des triangle à  $\Delta$  pour obtenir un convexe  $\Delta'$ .

Comme à chaque étape on enlève un coin, après un nombre fini d'itérations, on obtient un disque, que nous noterons  $\Delta'$ , tel qu'en chaque coin de  $\Delta'$  l'angle externe est positif. Un tel disque est convexe. Chaque coin de  $\Delta'$  est un coin de  $\Delta$  et, comme on l'a vu, l'angle externe de  $\Delta'$  en un coin est plus petit que l'angle externe de  $\Delta$  en ce même coin. On en déduit que la somme des angles externes de  $\Delta'$ , sans compter les angles en  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$  est plus petite que la mesure de plissage  $(1+x)\varepsilon$  de  $\tilde{c}_1$ . Si on note  $\varepsilon'_i$  l'angle interne de  $\Delta'$  en  $\tilde{x}_i$ , on a alors  $\text{aire}(\Delta') \leq (1+x)\varepsilon - (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)$ .

Comme les coins de  $\Delta'$  sont des coins de  $\Delta$  et que la fonction distance entre deux géodésiques est convexe, on a  $b = \max_{\tilde{x} \in \partial\Delta' - \tilde{c}_2} d_{\Delta'}(\tilde{x}, \tilde{c}_2)$ . Nous allons maintenant utiliser des formules de trigonométrie hyperbolique pour obtenir la majoration attendue.

Prenons les notations de la figure A.2 et notons  $A$  l'aire de  $\tau$ . On a  $A = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$  donc

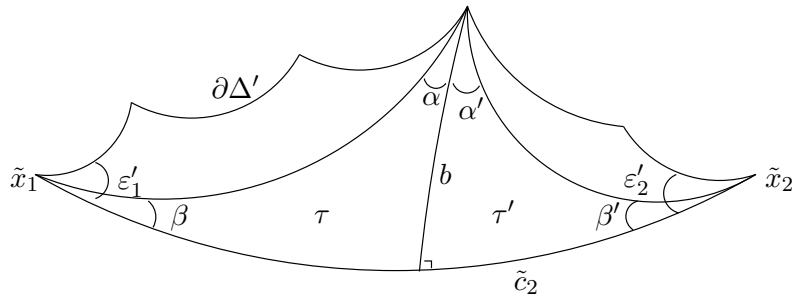


FIG. A.2 – Le convexe  $\Delta'$ .



$$\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - A\right) = \sin(\alpha + A).$$

D'après ([Bea]),  $\operatorname{ch} b \sin \alpha = \cos \beta$  donc  $\operatorname{ch} b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha + A)}{\sin \alpha} = \cos A + \cotan \alpha \sin A$ , d'où

$$\operatorname{ch} b \leq 1 + \cotan \alpha. \quad (\text{A.1})$$

Cette inégalité est encore vraie si l'on remplace  $\alpha$  par  $\alpha'$ .

Comme  $\operatorname{aire}(\Delta') \leq (1+x)\varepsilon - (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)$ , alors  $(1+x)\varepsilon \geq \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \geq \beta + \beta'$ . De plus  $\pi - (\alpha + \alpha') - (\beta + \beta') = \operatorname{aire}(\tau \cup \tau') \leq \operatorname{aire}(\Delta') \leq (1+x)\varepsilon$  donc  $\alpha + \alpha' \geq \pi - (\beta + \beta') - (1+x)\varepsilon \geq \pi - 2(1+x)\varepsilon$ . On en déduit que  $\max\{\alpha, \alpha'\} \geq \frac{\pi}{2} - (1+x)\varepsilon$  (qui est strictement positif par hypothèse). En remplaçant dans (A.1), on obtient

$$\operatorname{ch} b \leq 1 + \tan((1+x)\varepsilon) \quad (\text{A.2})$$

□

Rappelons que les coordonnées de Fermi sont les coordonnées normales à une géodésique  $\tilde{c}$  (ici  $\tilde{c}$  est la géodésique contenant  $\tilde{c}_2$ ). Dans ces coordonnées, un point est repéré par sa distance  $\rho$  à  $\tilde{d}$  et par la distance  $t$  entre sa projection sur  $\tilde{d}$  et un point base fixé sur  $\tilde{d}$ . La métrique hyperbolique s'écrit dans ces coordonnées :

$$ds^2 = d\rho^2 + (\operatorname{ch} \rho)^2 dt^2.$$

**Affirmation A.4.** *La projection orthogonale de  $\tilde{c}_1$  sur  $\tilde{d}$  est injective.*

*Démonstration.* Comme  $\varepsilon_1 \leq (1+x)\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ , il existe un petit voisinage de  $\tilde{x}_1$  dans  $\tilde{c}_1$  sur lequel la projection orthogonale  $q : \tilde{c}_1 \rightarrow \tilde{d}$  est injective. Supposons que la projection orthogonale de  $\tilde{c}_1$  sur  $\tilde{d}$  n'est pas injective ; il existe alors un point  $\tilde{y} \in \tilde{c}_1$  tel que la projection orthogonale sur  $\tilde{d}$  est injective sur le segment  $[\tilde{x}_1, \tilde{y}]$  mais n'est injective sur aucun voisinage de  $\tilde{y}$  dans  $\tilde{c}_1$ . Soit  $\tilde{k} \subset \tilde{c}_1$  un arc géodésique ; alors ou bien  $q$  est injective sur  $\tilde{k}$ , ou bien l'image de  $\tilde{k}$  est un point. On en déduit que  $\tilde{y}$  est un sommet de  $\Delta$ . Notons  $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$  les deux côtés de  $\partial\Delta$  dont le bord contient  $\tilde{y}$  et  $(\tilde{y}, q(\tilde{y}))$  la géodésique orthogonale à  $\tilde{d}$  passant par  $\tilde{y}$ . Comme la projection n'est injective sur aucun voisinage de  $\tilde{y}$  dans  $\tilde{c}_1$ , les deux arcs  $\tilde{k}_1$  et  $\tilde{k}_2$  sont contenus dans la même composante de  $\mathbb{H}^2 - (\tilde{y}, q(\tilde{y}))$ . Notons  $\tilde{T}_i$  le triangle dont un sommet est  $\tilde{x}_1$  et dont un côté est  $\tilde{k}_i$  ; par construction de  $\Delta$  les intérieurs de ces deux triangles  $\tilde{T}_1$  et  $\tilde{T}_2$  sont disjoints. On en déduit que  $\tilde{k}_2$  est contenu dans le disque  $D$  bordé par la réunion des arcs  $[\tilde{x}_1, q(\tilde{y})] \subset \tilde{c}_1$ ,  $[\tilde{x}_1, \tilde{z}] \subset \tilde{d}$  et de l'arc géodésique joignant  $\tilde{y}$  et  $q(\tilde{y})$  (cf. figure A.3). Il s'en suit que l'angle externe de  $D$  en  $\tilde{y}$  est plus petit que l'angle externe de  $\Delta$  en  $\tilde{y}$ . La somme des angles externes de  $\partial D$ , sans compter les angles en  $\tilde{x}_1$  et en  $q(\tilde{y})$ , est donc inférieure à  $(1+x)\varepsilon$ . De la formule de Gauss Bonnet, on déduit alors que l'aire de  $D$  est plus petite que  $(1+x)\varepsilon - \varepsilon_1 - \frac{\pi}{2}$ . Ceci contredit l'hypothèse de départ  $(1+x)\varepsilon < \frac{\pi}{2}$  et conclut la preuve de l'affirmation. □

La projection orthogonale de  $\tilde{c}_1$  sur  $\tilde{d}$  étant continue, son image est un arc connexe. D'après l'affirmation A.4, les extrémités de cet arc sont  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$ . L'image de  $\tilde{c}_1$  par la projection orthogonale sur  $\tilde{d}$  est donc exactement  $\tilde{c}_2$ .

En intégrant les coordonnées de Fermi sur  $\tilde{c}_1$ , on obtient alors

$$l_M(\tilde{c}_1) = \int_0^{d_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)} \sqrt{(\rho'(t))^2 + \operatorname{ch}^2(\rho(t))} dt.$$

Pour en déduire une majoration de  $l_M(\tilde{c}_1)$ , il nous faut majorer  $\rho'(t)$ .

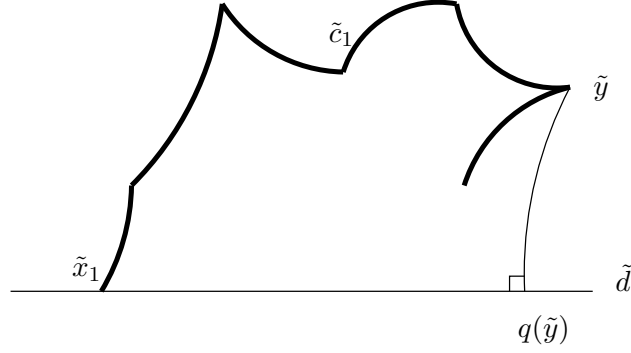


FIG. A.3 – Si la projection orthogonale n'était pas injective

**Affirmation A.5.** Notons  $\tilde{x}(t)$  le point de  $\tilde{c}_1$  dont la projection sur  $\tilde{d}$  est le point de paramètre  $t$  (on choisit  $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_1$  donc  $t$  est la distance entre  $\tilde{x}_1$  et la projection de  $\tilde{x}(t)$  sur  $\tilde{d}$ ); alors si  $\rho$  est différentiable en  $t$ , on a

$$|\rho'| \leq (\sqrt{\tan^2((1+x)\varepsilon) + 1 - ch^{-2}\rho}) ch^2\rho.$$

*Démonstration.* Soit  $t$  tel que  $\rho$  est différentiable en  $t$ ; supposons tout d'abord que  $\rho'(t) \geq 0$ . Notons  $\tilde{d}$  la géodésique tangente en  $\tilde{x}(t)$  à  $\tilde{c}_1$ . Nous allons distinguer deux cas suivant que  $\tilde{d}$  intersecte  $\tilde{c}_2$  ou non.

- Si  $\tilde{d}$  n'intersecte pas le segment  $\tilde{c}_2$ , notons  $\tilde{d}'$  la demi-géodésique d'extrémité  $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_1$  qui contient  $\tilde{x}(t)$  et notons  $\delta$  l'angle entre  $\tilde{c}$  et  $\tilde{d}'$  (cf. figure A.4). Si on considère que le point  $\tilde{x}(t)$

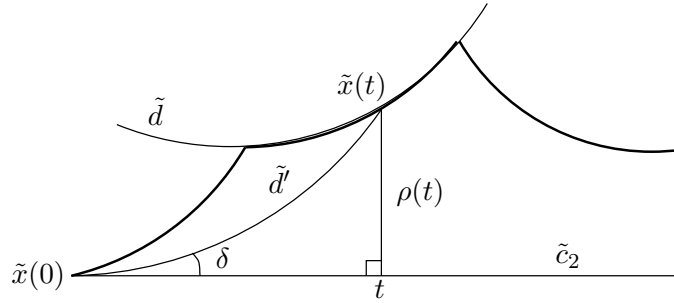


FIG. A.4 – Majoration de  $\rho'$ .

parcourt  $\tilde{d}'$  plutôt que  $\tilde{c}_1$ , on obtient une quantité  $\rho'(t)$  plus grande que celle cherchée. C'est ce  $\rho'$  que nous allons majorer.

D'après [Bea], on a  $\text{th}\rho = \text{sh}t \tan \delta$ , d'où

$$\begin{aligned} \rho'(1 - \text{th}^2\rho) &= \text{cht} \tan \delta = (\sqrt{1 + \text{sh}^2t}) \tan \delta \\ &= \tan \delta \sqrt{1 + \frac{\text{th}^2\rho}{\tan^2\delta}} = \sqrt{\tan^2\delta + \text{th}^2\rho}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi  $\rho' = \frac{\sqrt{\tan^2\delta + \text{th}^2\rho}}{1 - \text{th}^2\rho} = (\sqrt{\tan^2\delta + \text{th}^2\rho}) ch^2\rho$  et il ne nous reste plus qu'à majorer  $\delta$ .

Si un voisinage de  $\tilde{x}(0)$  dans  $\tilde{d}'$  est contenu dans  $\Delta$  alors  $\delta \leq \varepsilon_1 \leq (1+x)\varepsilon$  (cf. figure A.4). Sinon, il existe un point  $\tilde{y} \in \tilde{d}' \cap \tilde{c}_1$  tel que l'arc géodésique  $]\tilde{x}(0), \tilde{y}[$  n'intersecte pas  $\tilde{c}_1$ . Notons  $D$  le disque plongé bordé par les arcs  $[\tilde{x}(0), \tilde{y}] \subset \tilde{d}'$ ,  $[\tilde{y}, \tilde{x}_2] \subset \tilde{c}_1$  et  $\tilde{c}_2$  (cf. figure A.5); l'angle externe de  $D$  en  $\tilde{y}$  est négatif (i.e. l'angle interne est supérieur à  $\pi$ ), les autres coins sont

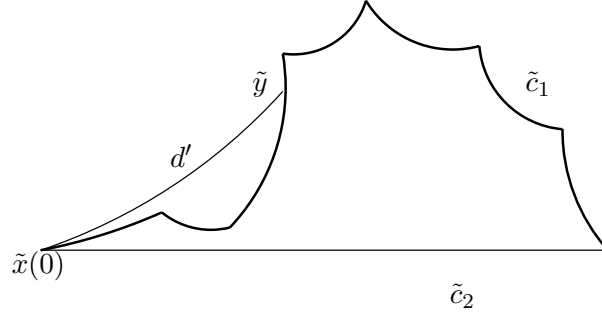


FIG. A.5 – Majoration de  $\delta$ .

des coins de  $\Delta$  et l'angle externe de  $D$  en chacun de ces coins, excepté  $\tilde{x}(0)$ , est celui de  $\Delta$ . On en déduit que l'aire de  $D$  est plus petite que  $(1+x)\varepsilon - \delta - \varepsilon_2$ , donc  $\delta \leq (1+x)\varepsilon$ .

On a alors

$$|\rho'| \leq \left( \sqrt{\tan^2((1+x)\varepsilon) + 1 - \text{ch}^{-2}\rho} \right) \text{ch}^2\rho.$$

- Si  $\tilde{d}$  intersecte  $\tilde{c}_2$ , notons  $\delta$  l'angle entre  $\tilde{c}_2$  et  $\tilde{d}$  (cf. figure A.6). Le raisonnement précédent nous donne  $\rho' = \left( \sqrt{\tan^2 \delta + \text{th}^2 \rho} \right) \text{ch}^2 \rho$ .

Notons  $I_t$  l'intervalle  $[t, d_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)] \subset \mathbb{R}$  et considérons le disque  $\Delta_{\tilde{d}}$  bordé par la réunion de  $\{\tilde{c}_1(s), s \in I_t\}$ , de  $\{\tilde{x}(s), s \in I_t\}$  et du segment de  $\tilde{d}$  joignant  $\tilde{c}_2$  à  $\tilde{x}(t)$  (cf. figure A.6). Les coins

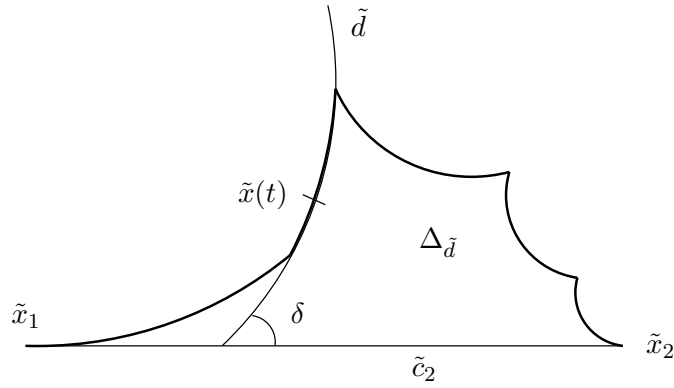


FIG. A.6 – Majoration de  $\rho'$ , deuxième cas.

de  $\partial\Delta_{\tilde{d}} - \tilde{c}_2$ , excepté  $\tilde{d} \cap \tilde{c}_2$ , sont des coins de  $\tilde{c}_1$ . La somme des angles externes de  $\Delta_{\tilde{d}}$ , sans compter ceux en  $\tilde{d} \cap \tilde{c}_2$  et en  $\tilde{x}_2$ , est donc plus petite que  $(1+x)\varepsilon$ . On en déduit que :

$$\text{aire}(\Delta_{\tilde{d}}) \leq (1+x)\varepsilon - \delta - \varepsilon_2.$$

Il s'ensuit que  $\delta \leq (1+x)\varepsilon$  et on a nouveau

$$|\rho'| \leq \left( \sqrt{\tan^2((1+x)\varepsilon) + 1 - \text{ch}^{-2}\rho} \right) \text{ch}^2\rho.$$

Ce raisonnement est valable tant que  $\rho(t)$  est croissante. Sur la partie où  $\rho(t)$  est décroissante, on remplace  $t$  par  $d_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - t$  et le même raisonnement fournit la même inégalité.  $\square$

De cette affirmation, on déduit que

$$\begin{aligned} l_M(\tilde{c}_1) &\leq \int_0^{d_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)} \sqrt{(1 + \tan^2((1+x)\varepsilon) - \operatorname{ch}^{-2}\rho(t)) \operatorname{ch}^4(\rho(t)) + \operatorname{ch}^2(\rho(t))} dt \\ &\leq \operatorname{ch}^2 b \sqrt{1 + \tan^2((1+x)\varepsilon)} d_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \end{aligned}$$

En combinant avec (A.2), on a alors

$$l_M(\tilde{c}_1) \leq (1 + \tan((1+x)\varepsilon))^2 (1 + \tan((1+x)\varepsilon)) d_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

Et en faisant tendre  $x$  vers 0 on en déduit

$$l_M(\tilde{c}_1) \leq (1 + \tan \varepsilon)^3 l_M(\tilde{c}_2) \quad (\text{A.3})$$

□

Fin de la preuve du lemme A.1 :

Reprenons les notations de l'énoncé du lemme A.1 et notons  $g \in \pi_1(M)$  l'image de  $c \in \pi_1(\partial M)$  par l'application induite par l'inclusion  $\partial M \rightarrow M$ . Soient  $\tilde{c}^* \in \mathbb{H}^3$  l'axe de  $g$ ,  $x$  un point de  $c - \lambda$  et  $\tilde{x}_1 \in \tilde{c}$  et  $\tilde{x}_2 \in \tilde{c}$  deux relevés consécutifs (i.e. tels que  $\tilde{x}_2 = g\tilde{x}_1$ ) de  $x$ . Notons  $\tilde{c}_1$  le segment de  $\tilde{c} \subset \partial \tilde{M}$  joignant  $\tilde{x}_1$  à  $\tilde{x}_2$  et  $\tilde{c}_2$  le segment géodésique de  $\tilde{M}$  qui les joint aussi (on est dans la configuration de la figure A.2). Notons enfin  $\tilde{y}_1$  et  $\tilde{y}_2$  les projections orthogonales de  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$  sur  $\tilde{c}^*$ ; on est alors dans la situation de la figure A.7. Comme  $\tilde{c}$  est géodésique en

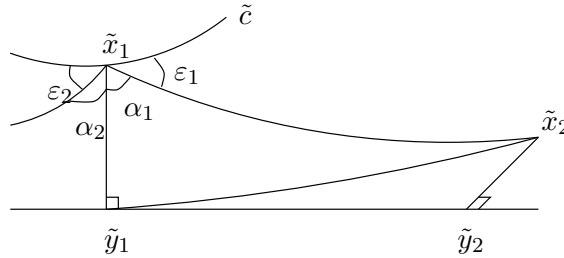


FIG. A.7 – Configuration de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathbb{H}^3$ .

$\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geq \pi$ . Supposons que  $\alpha_2 \geq \alpha_1$  et notons  $\mathcal{R}$  la surface réunion des triangles géodésiques  $\tilde{y}_1\tilde{x}_1\tilde{x}_2$  et  $\tilde{x}_2\tilde{y}_1\tilde{y}_2$ . La métrique sur  $\mathcal{R}$  définie par la longueur des chemins est hyperbolique et  $\partial\mathcal{R}$  est un quadrilatère dont les angles en  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{y}_2$  sont  $\alpha_1$  et  $\frac{\pi}{2}$ , l'angle  $\beta$  en  $\tilde{y}_1$  est supérieur à  $\frac{\pi}{2}$  et l'angle  $\alpha$  en  $\tilde{x}_2$  vérifie  $\alpha \geq \alpha_2$ . On peut plonger  $\mathcal{R}$  dans  $\mathbb{H}^2$ ; dans la suite, nous identifierons  $\mathcal{R}$  et son image par ce plongement et c'est sur cette image que nous allons travailler. Prolongeons le segment  $[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2]$  en une géodésique infinie  $\tilde{e}$  et notons  $l$  la distance de  $\tilde{y}_1$  à la projection orthogonale de  $\tilde{x}_1$  sur  $\tilde{e}$ .

Notons  $D$  la distance de  $\tilde{x}_1$  à  $\tilde{y}_1$  (qui est aussi celle de  $\tilde{x}_2$  à  $\tilde{y}_2$ ). Comme  $2\alpha \geq \alpha_1 + \alpha_2 \geq \pi - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \geq \pi - (1+x)\varepsilon$ , alors  $\alpha \geq \frac{\pi}{2} - \frac{(1+x)}{2}\varepsilon > 0$ . Ceci entraîne l'existence de  $B_\varepsilon \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon = 0$  et que si  $D \geq B_\varepsilon$ , alors  $\tilde{c}_2$  n'intersecte pas  $\tilde{e}$ .

Si  $D \leq B_\varepsilon$ , on a  $l_M(\tilde{c}_2) \leq l_M(c^*) + 2B_\varepsilon$ . En combinant avec (A.3), on obtient  $l_M(c) \leq (1 + \tan \varepsilon)^3 (l_M(c^*) + 2B_\varepsilon)$  et le lemme est prouvé.

Dans le cas où  $D \geq B_\varepsilon$ , nous allons comparer la longueur de  $\tilde{c}_2$  avec la longueur  $l_M(c^*) = d(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$  d'un domaine fondamental pour  $g$  sur  $\tilde{c}^*$ .

**Affirmation A.6.** Dans le cas où  $D \geq B_\varepsilon$ , on a

$$l_M(\tilde{c}_2) \leq d(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) + l + 2 \operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right)}\right).$$

*Démonstration.* Comme  $d(\tilde{x}_1, \tilde{e}) \leq d(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ ,  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ . On est donc dans l'une des situations de la figure A.8, différenciées selon que le segment géodésique qui réalise la distance de  $\tilde{e}$  à la géodésique contenant  $\tilde{c}_2$  est contenu ou non dans  $\mathcal{R}$ .

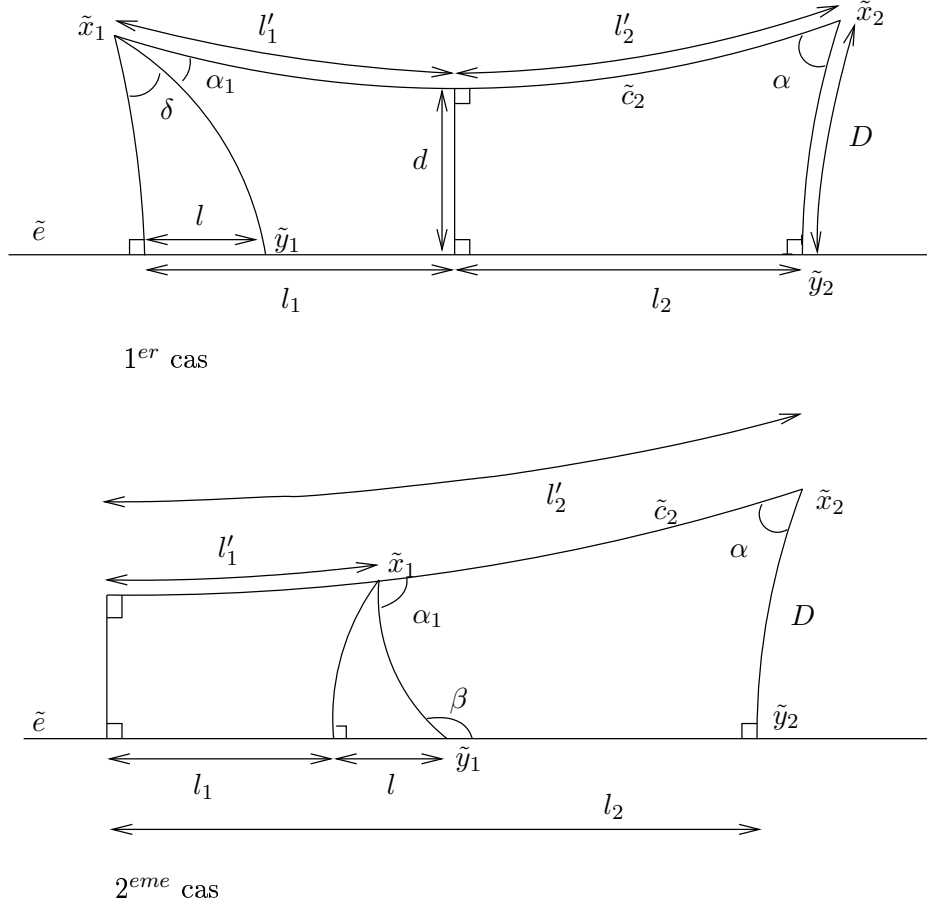


FIG. A.8 – Après qu'on ait déplié le quadrilatère  $\mathcal{R}$ .

Dans chacun des deux cas de la figure A.8, on a  $\operatorname{ch}l_2 = \operatorname{ch}l'_2 \sin \alpha \geq \operatorname{ch}l'_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1+x}{2}\varepsilon\right) = \operatorname{ch}l'_2 \cos\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right)$ , d'où  $\operatorname{ch}l'_2 \leq \frac{\operatorname{ch}l_2}{\cos\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right)} \leq \operatorname{ch}\left(l_2 + \operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right)}\right)\right)$ . On obtient ainsi

$$l'_2 \leq l_2 + \operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right)}\right).$$

Comme la distance de  $\tilde{x}_1$  à  $\tilde{e}$  est inférieure à  $d(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = d(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ , l'angle  $\delta + \alpha_1$  est plus grand que  $\alpha$ . Les calculs ci-dessus fournissent donc

$$l'_1 \leq l_1 + \operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right)}\right).$$

Dans le premier cas de la figure A.8, en additionnant ces deux inégalités, on obtient

$$l_M(\tilde{c}_2) \leq d(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) + l + 2 \operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right)}\right).$$

Dans le deuxième cas, comme  $l_1 \leq l'_1$ , on a :

$$l_M(\tilde{c}_2) \leq l'_2 - l'_1 \leq l_2 + \operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right)}\right) - l_1 \leq d(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) + l + \operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right)}\right).$$

□

Il ne nous reste plus qu'à majorer  $l$ . Notons  $\mathcal{R}'$  le quadrilatère dont les sommets sont  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2$  et le pied de la perpendiculaire à  $\tilde{e}$  passant par  $\tilde{x}_1$ . En calculant l'aire de  $\mathcal{R}'$  en intégrant les coordonnées de Fermi et en comparant avec la formule de Gauss-Bonnet, on obtient :

$$(l_M(c^*) + l)\operatorname{sh}d \leq \iint_{\mathcal{R}'} \operatorname{ch}\rho \, d\rho \, dt = \pi - \delta - \alpha_1 - \alpha \leq (1+x)\varepsilon. \quad (\text{A.4})$$

D'après [Bea], on a

$$\operatorname{ch}d = \operatorname{ch}D \sin \alpha \geq \operatorname{ch}D \cos \frac{1+x}{2}\varepsilon$$

donc  $\operatorname{ch}D \leq (\cos \frac{1+x}{2}\varepsilon)^{-1} \operatorname{ch}d$ . Comme  $\pi - (\alpha_1 + \alpha + \delta) \geq 0$ ,  $\delta \leq \pi - (\alpha + \alpha_1) \leq (1+x)\varepsilon$ .

On en déduit que  $\operatorname{sh}l = \operatorname{sh}D \sin \delta \leq \operatorname{sh}D \sin(1+x)\varepsilon$  donc

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 l &\leq (\operatorname{ch}^2 D - 1) \sin^2((1+x)\varepsilon) \leq \left(\frac{\operatorname{ch}^2 d}{\cos^2\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right)} - 1\right) \sin^2((1+x)\varepsilon) \\ &\leq 4(\operatorname{sh}^2 d + \sin^2 \frac{1+x}{2}\varepsilon) \sin^2 \frac{1+x}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme  $(\operatorname{sh}^2 d + \sin^2 \frac{1+x}{2}\varepsilon) \leq 2 \max\{\operatorname{sh}^2 d, \sin^2 \frac{1+x}{2}\varepsilon\}$ , on a,

- ou bien  $\operatorname{sh}^2 l \leq 8 \sin^4 \frac{1+x}{2}$  et  $l \leq \operatorname{sh}l \leq 4 \sin^2 \frac{1+x}{2}\varepsilon \leq (1+x)^2 \varepsilon^2$  ;

- ou bien  $\operatorname{sh}^2 l \leq 8 \operatorname{sh}^2 d$  et  $l^2 \leq l \operatorname{sh}l \leq 4l \operatorname{sh}d \sin\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right)$ . En utilisant (A.4), on en déduit  $l^2 \leq 4\left(\frac{(1+x)l\varepsilon}{l_M(c^*)+l}\right) \sin\left(\frac{1+x}{2}\varepsilon\right) \leq 2(1+x)^2 \varepsilon^2$ .

Finalement, on a

$$l \leq \operatorname{Max}\{(1+x)^2 \varepsilon^2, \sqrt{2}(1+x)\varepsilon\} \leq (1+x)^2(\sqrt{2}\varepsilon + \varepsilon^2).$$

En faisant tendre  $x$  vers 0 et en combinant avec (A.3), on obtient finalement

$$l_M(c) = l_M(\tilde{c}_1) \leq (1 + \tan \varepsilon)^3 (l_M(c^*) + 2 \operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} + \sqrt{2}\varepsilon + \varepsilon^2\right)).$$

□

## Annexe B

# Compactification de l'espace de Teichmüller et laminations géodésiques $\Lambda$ -mesurée

Soient  $S$  une surface hyperbolique de volume fini et  $(s_n)$  une suite de métriques hyperboliques complètes sur  $S$ ; supposons qu'aucune suite extraite de  $(s_n)$  ne converge algébriquement. D'après [MoS1], il existe une suite extraite (que nous noterons aussi  $(s_n)$ ) qui tend vers une action minimale à petits stabilisateurs d'arêtes de  $\pi_1(S)$  sur un  $\Lambda$ -arbre  $\mathcal{A}$ . La propriété essentielle de cette action est que pour toute paire de courbes simples  $c_1, c_2$  telle que  $l_{s_n}(c_1) \rightarrow \infty$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{s_n}(c_2)}{l_{s_n}(c_1)} = \frac{\delta_{\mathcal{L}}(c_2)}{\delta_{\mathcal{L}}(c_1)}$ . D'après [MoO], cette action de  $\pi_1(S)$  sur  $\mathcal{A}$  a une lamination géodésique  $\Lambda$ -mesurée duale  $\mathcal{L}$ .

Dans cet appendice, nous allons prouver le théorème de continuité pour les laminations géodésiques  $\Lambda$ -mesurées qui a été précédemment utilisé.

**Théorème B.1.** *Soient  $(s_n)$  une suite de métriques hyperboliques complètes sur une surface  $S$  qui ont un volume fini et qui tendent vers une lamination géodésique  $\Lambda$ -mesurée  $\mathcal{L}$  et  $(\lambda_n)$  une suite de laminations géodésiques  $(\mathbb{R}$ -)mesurées telle que  $(\lambda_n)$  converge vers  $\lambda \in \mathcal{ML}(S)/\mathcal{R}$  et que  $l_{s_n}(\lambda_n)$  est bornée. Alors  $|\lambda|$  n'intersecte pas  $|\mathcal{L}|$  transversalement.*

*Démonstration.* Soient  $(s_n)$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $(\lambda_n)$ ,  $\lambda$  comme dans l'énoncé du théorème et supposons que  $|\lambda|$  intersecte  $|\mathcal{L}|$  transversalement. Fixons une métrique hyperbolique sur  $S$  qui nous servira de référence et considérons une composante connexe  $\lambda^i$  de  $\lambda$  qui intersecte  $\mathcal{L}$  transversalement.

Supposons tout d'abord que  $\lambda^i$  est un minimal exceptionnel; soit  $c \subset S(\lambda^i)$  une géodésique simple compacte qui intersecte  $\mathcal{L}$  transversalement. Comme  $\lambda^i$  est arationnelle dans  $S(\lambda^i)$ , toute feuille de  $\mathcal{L}$  qui intersecte  $c$  transversalement intersecte aussi  $\lambda^i$  transversalement. Il existe donc un réseau ferroviaire  $\tau$  qui a les propriétés suivantes :

- $\tau$  porte  $\lambda^i$ ;
- $\tau$  a seulement un aiguillage  $A \subset c - \mathcal{L}$ ;
- pour tout arc  $k \subset \tau$  transverse aux traverses et tel que  $k \cap A = \partial k$ ,  $\delta_{\mathcal{L}}(k) > \delta_{\mathcal{L}}(c)$ .

Soit  $k \subset \lambda^i$  un arc tel que  $k \cap A = \partial k$ ; paramétrons  $k$  par  $[0, 1]$ . Comme  $\partial k \subset |\lambda^i| \cap c$ ,  $k$  est bien défini pour n'importe quelle métrique hyperbolique sur  $S$  (cf. la remarque de la section 1.1). Notons  $b$  la branche de  $\tau$  qui contient  $k$  et  $b(\lambda)$  la mesure d'une traverse de  $b$ .

Supposons tout d'abord que  $\frac{dk}{dt}(0)$  et  $\frac{dk}{dt}(1)$  pointent du même côté de  $A$ ; notons  $\kappa$  le sous-arc de  $A$  qui joint  $k(0)$  à  $k(1)$  et  $c_b$  la géodésique simple compacte qui est librement homotope à  $k \cup \kappa$ . Soit  $\hat{d}$  un relevé de  $k \cup \kappa$  à  $\mathbb{H}^2$ ; nous allons supposer que  $A$  est petit (pour la métrique

de référence) de façon que  $\hat{d}$  soit une quasi-geodesique. Il existe alors un relevé  $\hat{c}_b$  de  $c_b$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $\hat{d}$  est contenue dans un  $\varepsilon$ -voisinage de  $\hat{c}_b$ . Comme  $A$  n'intersecte pas  $\mathcal{L}$ , toute feuille de l'image réciproque de  $\mathcal{L}$  qui intersecte  $\hat{d}$  intersecte  $\hat{d}$  seulement une fois et intersecte aussi  $\hat{c}_b$ . On a alors  $\delta_{\mathcal{L}}(c_b) = \delta_{\mathcal{L}}(k) > \delta_{\mathcal{L}}(c)$  donc  $l_{s_n}(c_b) - l_{s_n}(c) \longrightarrow \infty$ . On a ainsi

$$l_{s_n}(k) \geq l_{s_n}(c_b) - l_{s_n}(A) \geq l_{s_n}(c_b) - l_{s_n}(c) \longrightarrow \infty. \quad (\text{B.1})$$

Cette inégalité (B.1) est valable pour tout arc  $k$  de  $\lambda^i - A$  contenu dans  $b$ . Quitte à extraire une sous-suite, les laminations géodésiques  $\lambda_n$  sont portées par un réseau ferroviaire qui contient  $\tau$  comme sous-réseau et l'inégalité (B.1) est valable pour tout arc de  $\lambda_n - A$  contenu dans  $b$ , donc  $l_{s_n}(\lambda_n) \geq b(\lambda_n)(l_{s_n}(c_b) - l_{s_n}(c))$ . Comme  $b(\lambda_n) \longrightarrow b(\lambda)$ , pour  $n$  assez grand, nous avons  $l_{s_n}(\lambda_n) \geq \frac{1}{2}b(\lambda)(l_{s_n}(c_b) - l_{s_n}(c)) \longrightarrow \infty$ . Cette contradiction avec la supposition que  $l_{s_n}(\lambda_n)$  est bornée montre que  $\frac{dk}{dt}(0)$  et  $\frac{dk}{dt}(1)$  ne pointent pas du même côté de  $A$ .

Considérons donc que pour tout arc  $k \subset \tau$  qui est transverse aux traverses et tel que  $k \cap A = \partial k$ ,  $\frac{dk}{dt}(0)$  et  $\frac{dk}{dt}(1)$  ne pointent pas du même côté de  $A$ . Soient  $k_1 \subset \tau$  et  $k_2 \subset \tau$  deux arcs transverses aux traverses et tels que  $k_j \cap A = \partial k_j$  et que  $k_1 \cap k_2 = k_1(1) = k_2(0)$ ; notons  $b_j$  la branche de  $\tau$  qui contient  $k_j$ . Du fait que  $\frac{dk_j}{dt}(0)$  et  $\frac{dk_j}{dt}(1)$  ne pointent pas du même côté de  $A$  on déduit que  $b_1 \neq b_2$ . Notons  $[k_1(0), k_2(1)] \subset A$  l'arc joignant  $k_1(0)$  à  $k_2(1)$ . Si  $[k_1(0), k_2(1)] \cap (k_1 \cup k_2) = \emptyset$ , notons  $c_b$  la géodésique simple compacte qui est librement homotope à  $k_1 \cup k_2 \cup [k_1(0), k_2(1)]$  et dans le cas contraire, notons  $c_b$  la géodésique simple compacte qui est librement homotope à  $k_1 \cup [k_1(1), k_2(1)] \cup (k_2)^{-1} \cup [k_2(0), k_1(0)]$ . Avec les arguments utilisés dans le paragraphe précédent, on obtient  $l_{s_n}(\lambda_n) \geq \frac{1}{2}(\int_{A \cap b_1 \cap b_2} d\lambda)(l_{s_n}(c_b) - 2l_{s_n}(c)) \longrightarrow \infty$ . Ceci conduit à la même contradiction qu'auparavant, prouvant que  $\lambda^i$  n'est pas un minimal exceptionnel.

Ainsi  $\lambda^i$  est une feuille compacte; comme  $l_{s_n}(\lambda^i)$  est bornée,  $\lambda^i$  n'est pas une feuille de  $\lambda_n$  pour  $n$  assez grand. Munissons  $S$  d'une métrique hyperbolique complète et considérons deux pantalons  $P_1 \subset \partial M$  et  $P_2 \subset \partial M$  (éventuellement confondus) dont le bord contient  $\lambda^i$ . Nous allons seulement traiter le cas où  $P_1$  et  $P_2$  sont distincts car l'autre cas ne nécessite que des modifications mineures. Ôtons de  $P_j$  un voisinage annulaire de  $(\partial P_j - \lambda^i)$ , pour  $j = 1, 2$ , et notons  $S = P_1 \cup P_2$ . Ainsi  $\partial S = \partial P_1 \cup \partial P_2 - \lambda^i$  et les intersections de  $\partial S$  et de  $|\mathcal{L}|$  sont transverses. Soit  $c \subset S$  une géodésique simple compacte qui intersecte  $\lambda^i$  en deux points; quitte à changer  $c$  en lui faisant subir des twists de Dehn le long de  $\lambda^i$ , on peut supposer que  $c \not\subset |\mathcal{L}|$ . Notons  $|\mathcal{L}^i|$  la réunion des composantes de  $|\mathcal{L}| \cap S$  qui intersectent  $\lambda^i$  et  $|\mathcal{L}^r|$  la réunion des autres composantes de  $|\mathcal{L}| \cap S$ . La  $\Lambda$ -mesure transverse de  $\mathcal{L}$  nous fournit des  $\Lambda$ -mesures transverses sur  $|\mathcal{L}^i|$  et sur  $|\mathcal{L}^r|$  et on a  $\delta_{\mathcal{L}}(c) = \delta_{\mathcal{L}^i}(c) + \delta_{\mathcal{L}^r}(c)$ . Comme toute composante de  $|\mathcal{L}| \cap P_j$  est compacte, alors il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que pour  $j = 1, 2$  et pour toute composante  $l$  de  $|\mathcal{L}| \cap P_j$ ,  $\#\{l \cap c\} \leq \frac{m}{2}$ . De ce fait, on a  $\delta_{\mathcal{L}^i}(c) \leq m\delta_{\mathcal{L}}(\lambda^i)$ .

D'après [Th4] (voir aussi [FLP]), il existe une suite de multi-courbes pondérées  $(\nu_n)$  et une constante  $C$  telles que pour toute lamination géodésique mesurée  $\gamma \in \mathcal{ML}(S)$  on a  $i(\nu_n, \gamma) \leq l_{s_n}(\gamma) \leq i(\nu_n, \gamma) + Cl_{s_0}(\gamma)$ . Coupons  $\nu_n \cap S$  en deux parties disjointes  $\nu_n^i$  et  $\nu_n^r$  où  $\nu_n^i$  est composée des composantes qui intersectent  $\lambda^i$ ; on a  $i(\nu_n, c) = i(\nu_n^i, c) + i(\nu_n^r, c)$ . Toute composante connexe de  $|\nu_n^r|$  intersecte  $c$  en un ou deux points, selon que ses extrémités sont contenues dans une ou deux composantes de  $\partial S$  (cf. figure B.1). Il existe donc  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{\frac{1}{2}\}\mathbb{N}$  et  $\epsilon \in \{0, 1, 2\}$  tels que  $i(\nu_n^r, c) = \sum_{k=1}^4 a_k i(\nu_n, \partial^k S) - \epsilon i(\nu_n, \lambda^i)$  où  $\partial^k S$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  sont les composantes connexes de  $\partial S$ . Précisons comment calculer  $a_1$  et  $a_2$ , en considérant que  $\partial^1 S, \partial^2 S \subset \partial P_1$  ( $a_3$  et  $a_4$  sont calculés de la même manière) :

- si  $i(\nu_n, \partial^1 S) + i(\nu_n, \partial^2 S) \geq i(\nu_n, \lambda^i)$ ,  $i(\nu_n, \partial^2 S) + i(\nu_n, \lambda^i) \geq i(\nu_n, \partial^1 S)$  et  $i(\nu_n, \partial^1 S) + i(\nu_n, \lambda^i) \geq i(\nu_n, \partial^2 S)$  alors le poids total porté par les composantes de  $\nu_n^r$  est  $\frac{1}{2}(i(\nu_n, \partial^1 S) + i(\nu_n, \partial^2 S) - i(\nu_n, \lambda^i))$  et on a  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$  et  $\epsilon = 1$  (cf. fig B.1, cas 1);



– si  $i(\nu_n, \partial^1 S) + i(\nu_n, \partial^2 S) \leq i(\nu_n, \lambda^i)$  alors  $a_1 = a_2 = \epsilon = 0$  (cf. fig B.1, cas 2) ;

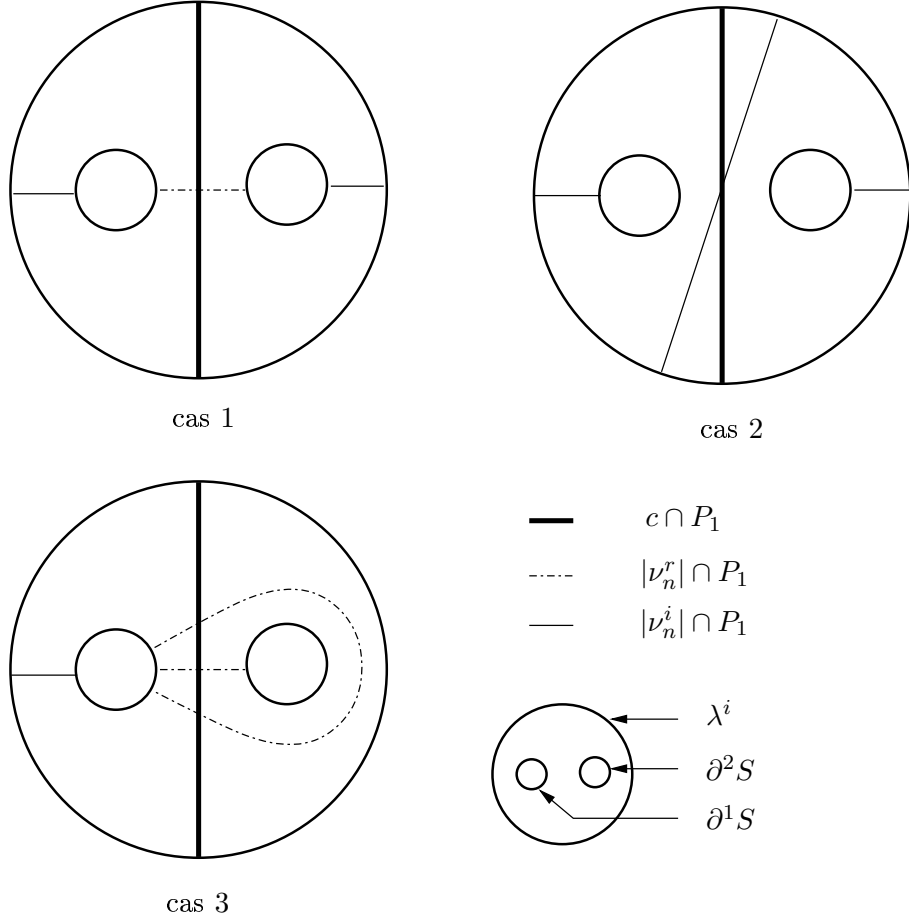


FIG. B.1 – Calcul de  $a_k$  et de  $\epsilon$

– si  $i(\nu_n, \partial^1 S) \geq i(\nu_n, \partial^2 S) + i(\nu_n, \lambda^i)$  alors  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$  et  $\epsilon = 1$  (cf. fig B.1, cas 3). Si  $i(\nu_n, \partial^2 S) \geq i(\nu_n, \partial^1 S) + i(\nu_n, \lambda^i)$  alors  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$  et  $\epsilon = 1$ .

Si l'une des inégalités triangulaires ci-dessus est une égalité, alors nous sommes dans le cas 1 et le cas 2 ou dans le cas 1 et le cas 3 et on peut choisir les  $a_k$  et  $\epsilon$  suivant ce qui nous convient.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les  $a_k$  et  $\epsilon$  ne dépendent pas de  $n$ .

Soit  $(\kappa_n)$  une suite d'arcs de  $c$  tels que  $\underline{\lim} \int_{\kappa_n} d\lambda_n > 0$  et que  $(\kappa_n)$  converge pour la topologie de Hausdorff vers un point de  $\lambda^i$ . Soit  $\mathcal{V}(|\lambda^i|)$  un voisinage annulaire de  $|\lambda^i|$ ; rappelons la description de  $\lambda_n \cap \mathcal{V}(|\lambda^i|)$  que nous avons donnée dans la preuve du lemme 4.3.2 :  $|\lambda_n| \cap \mathcal{V}(|\lambda^i|)$  est une famille de segments disjoints qui relient les deux composantes de  $\partial\mathcal{V}(|\lambda^i|)$  et qui tournent beaucoup autour de  $|\lambda^i|$  (d'après l'affirmation 3.3.3) et le poids total de la mesure transverse portée par  $|\lambda_n| \cap \mathcal{V}(|\lambda^i|)$  tend vers 0 (d'après l'affirmation 3.3.2). Étant donnée une orientation de  $c$ , on munit les points de  $\kappa_n \cap \lambda_n$  de l'ordre induit. Pour  $n$  assez grand,  $\kappa_n$  contient un arc  $\kappa'_n$  tel que  $\int_{\kappa'_n} d\lambda_n \geq \frac{\int_{\kappa_n} d\lambda_n}{2}$  et que tout point  $x_n$  de  $\kappa'_n \cap \lambda_n$  est relié à un point  $y_n > x_n$  de  $\kappa_n \cap \lambda_n$  par un arc  $[x_n, y_n] \subset \lambda_n - \kappa_n$ . Fixons  $n$ , considérons un point  $x_n$  de  $\kappa'_n \cap \lambda_n$  et le point  $y_n$  associé; notons  $c_{x_n y_n}$  la courbe compacte qui est la réunion de  $[x_n, y_n] \subset \lambda_n$  et de l'arc  $\kappa_{x_n y_n} \subset \kappa_n$  qui joint  $x_n$  à  $y_n$ . Cette courbe  $c_{x_n y_n}$  peut être homotopée dans  $\lambda^i$ , donc  $i(\nu_n, c_{x_n y_n}) \geq i(\nu_n, \lambda^i)$ . On a alors  $i(\nu_n, \lambda_n) \geq (\int_{\kappa'_n} d\lambda_n) \min\{\int_{[x_n, y_n]} d\nu_n / x_n \in \kappa'_n \cap \lambda_n\} \geq (\int_{\kappa'_n} d\lambda_n)(i(\nu_n, \lambda^i) - \int_{\kappa'_n} d\nu_n)$  donc  $\int_{\kappa_n} d\nu_n \geq \int_{\kappa'_n} d\nu_n \geq i(\nu_n, \lambda^i) - \frac{2}{\int_{\kappa_n} d\lambda_n} i(\nu_n, \lambda_n)$ . Soit  $w$  le poids de  $\lambda^i$  vue comme une

sous-lamination de  $\lambda'$  et  $0 < Q < \frac{w}{m+3}$ ; d'après la description de  $\lambda_n \cap \mathcal{V}(|\lambda^i|)$ , pour  $n$  assez grand  $c$  contient  $m+3$  segments disjoints  $\kappa_n^j$  tels que  $\int_{\kappa_n^j} d\lambda_n \geq Q$  et que pour tout  $1 \leq j \leq m+3$ ,  $(\kappa_n^j)$  converge vers un point  $x \subset c \cap \lambda^i$  (qui ne dépend pas de  $j$ ). Du fait que tous ces segments  $(\kappa_n^j)$  convergent vers un point  $x \subset c \cap \lambda^i$  on déduit que pour  $n$  assez grand, toute feuille de  $|\nu_n| \cap S$  qui intersecte un  $\kappa_n^j$  est contenue dans  $|\nu_n^i|$ . On a ainsi  $i(\nu_n^i, c) \geq \sum_j \int_{\kappa_n^j} d\nu_n \geq (m+3)i(\nu_n, \lambda^i) - \frac{2(m+3)}{\int_{\kappa_n^j} d\lambda_n} i(\nu_n, \lambda_n)$ .

On a alors  $i(\nu_n, c) \geq \sum_{k=1}^4 a_k i(\nu_n, \partial^k S) + (m+3-\epsilon)i(\nu_n, \lambda^i) - \frac{2(m+3)}{E} i(\nu_n, \lambda_n)$ . On a vu que  $i(\nu_n, \lambda_n) \leq l_{s_n}(\lambda_n)$  et que  $l_{s_n}(\lambda^i) \leq i(\nu_n, \lambda^i) + Cl_{s_0}(\lambda^i)$ , or  $l_{s_n}(\lambda_n)$  est bornée et  $l_{s_n}(\lambda^i) \rightarrow \infty$  donc pour  $n$  assez grand  $\frac{2(m+3)}{E} i(\nu_n, \lambda_n) \leq i(\nu_n, \lambda^i)$ . On obtient ainsi  $i(\nu_n, c) \geq \sum_{k=1}^4 a_k i(\nu_n, \partial^k S) + (m+2-\epsilon)i(\nu_n, \lambda^i)$  d'où  $l_{s_n}(c) \geq \sum_{k=1}^4 a_k (l_{s_n}(\partial^k S) - Cl_{s_0}(\partial^k S)) + (m+2-\epsilon)(l_{s_n}(\lambda^i) - Cl_{s_0}(\lambda^i))$ . Comme  $l_{s_n}(\lambda^i) \rightarrow \infty$  on en déduit que pour  $n$  assez grand  $l_{s_n}(c) \geq \sum_{k=1}^4 a_k l_{s_n}(\partial^k S) + (m+1-\epsilon)l_{s_n}(\lambda^i)$ . D'après [MoS1], ceci entraîne que  $\delta_{\mathcal{L}}(c) \geq \sum_{k=1}^4 a_k \delta_{\mathcal{L}}(\partial^k S) + (m+1-\epsilon)\delta_{\mathcal{L}}(\lambda^i)$ .

Pour les raisons citées pour les  $(\nu_n)$ , il existe  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{\frac{1}{2}\}\mathbb{N}$  et  $\epsilon \in \{0, 1, 2\}$  tels que  $\delta_{\mathcal{L}^r}(c) = \sum_{k=1}^4 a_k \delta_{\mathcal{L}}(\partial^k S) - \epsilon \delta_{\mathcal{L}}(\lambda^i)$ . Si  $i(\nu_n, \partial^j S) \rightarrow \infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i(\nu_n, \partial^i S)}{i(\nu_n, \partial^j S)} = \frac{\delta_{\mathcal{L}}(\partial^i S)}{\delta_{\mathcal{L}}(\partial^j S)}$ , donc, pour  $n$  assez grand,  $\delta_{\mathcal{L}}(\partial^k S)$  et  $\delta_{\mathcal{L}}(\lambda^i)$  satisfont les mêmes inégalités que  $i(\nu_n, \partial^k S)$  et  $i(\nu_n, \lambda^i)$ . On en déduit que les  $a_k$  et  $\epsilon$  utilisés pour  $\delta_{\mathcal{L}}(c)$  sont les mêmes que ceux utilisés pour  $i(\nu_n^r, c)$ . Finalement, on a  $\delta_{\mathcal{L}}(c) \leq \sum_{k=1}^4 a_k \delta_{\mathcal{L}}(\partial^k S) + (m-\epsilon)\delta_{\mathcal{L}}(\lambda^i)$  ce qui contredit  $\delta_{\mathcal{L}}(c) \geq \sum_{k=1}^4 a_k \delta_{\mathcal{L}}(\partial^k S) + (m+1-\epsilon)\delta_{\mathcal{L}}(\lambda^i)$  et achève la preuve du théorème B.1.  $\square$

**Remarque.** Une manière informelle mais plus imagée d'interpréter ce qui se passe ici est la suivante. La suite de feuilletages mesurés  $\nu_n$  tend vers  $\mathcal{L}$ , c'est-à-dire que pour tout couple de courbes simples compactes  $c_1$  et  $c_2$  tel que  $i(\nu_n, c_1) \rightarrow \infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i(\nu_n, c_2)}{i(\nu_n, c_1)} = \frac{\delta_{\mathcal{L}}(c_2)}{\delta_{\mathcal{L}}(c_1)}$ . Le fait que  $l_{s_n}(\lambda_n)$  est bornée oblige  $\lambda_n$  à suivre  $\nu_n$ , ce qui entraîne que  $\lambda$  n'intersecte pas  $\mathcal{L}$  transversalement.  $\diamond$

# Bibliographie

- [AnC] J.W. Anderson, R.D. Canary, *Algebraic limits of Kleinian groups which rearrange the pages of a book*, Invent. Math. 126 (1996), 205-214.
- [Bea] A.F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics 91 (1983).
- [BeP] R. Benedetti, C. Petronio, *Lectures on hyperbolic geometry*, (1992).
- [Ber] L. Bers, *Simultaneous uniformization*, Bull. Am. Math. Soc. 66 (1960), 94-97.
- [Bo1] F. Bonahon, *Cobordism of automorphisms of surfaces*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., IV. Ser. 16 (1983), 451-466.
- [Bo2] F. Bonahon, *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3*, Ann. of Math. (2) 124 (1986), 71-158.
- [Bo3] F. Bonahon, *Variations of the boundary of 3-dimensionnal hyperbolic convex cores*, J. Diff. Geom. 50 (1998), 1-24.
- [Bo4] F. Bonahon, *Shearing hyperbolic surfaces, bending pleated surfaces and Thurston's symplectic form*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 5 (1996), 233-297.
- [Bo5] F. Bonahon, *Kleinian groups which are almost fuchsian*, preprint (2002).
- [BoO] F. Bonahon, J.-P. Otal, *Laminations mesurées de plissage des variétés hyperboliques de dimension 3*, Prépublication de l'UMPA n°285 (2001).
- [Br] M. Bridgeman, *Average bending of convex pleated planes in hyperbolic three-space*, Invent. Math. 132 (1998), 381-391.
- [CaB] A.J. Casson, S.A. Bleiler, *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts 9 (1988).
- [CaM] R. D. Canary, D McCullough, *Homotopy Equivalences of 3-Manifolds and Deformation Theory of Kleinian Groups*, to appear in Mem. Amer. Math. Soc.
- [Ch] V. Chuckrow, *Schottky groups and limits of Kleinian groups*, Bull. Amer. Math. Soc. (1967), 139-141.
- [CEG] R.D. Canary, D.B.A. Epstein, P. Green, *Notes on notes of Thurston*, Analytical and Geometrical Aspects of hyperbolic Space (1987), 3-92.
- [CuM] M. Culler, J.W. Morgan, *Group actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, Proc. Lond. Math. Soc. 55 (1987), 571-604.
- [EpM] D.B.A. Epstein, A.Marden, *Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces*, Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space (1987), 113-253.
- [Ga] D. Gabai, *On the geometric and topological rigidity of hyperbolic 3-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997), 37-74.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Ponearu, *Travaux de Thurston sur les surfaces. Seminaire Orsay*, Asterisque No.66-67 (1979).
- [Fl] W. J. Floyd, *Group completions and limit sets of kleinian groups*, Invent. Math. 57 (1980), 205-218.
- [Ga] H. Garland, *A rigidity theorem for discrete subgroups*, Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967).
- [GiS] H. Gillet, P. Shalen, *Dendrology of groups in low  $\mathbb{Q}$ -rank*, J. Diff. Geom. 32 (1990), 605-712.
- [He] J. Hempel, *3-Manifolds*, Annals of Mathematics Studies 86 (1976).
- [Ja] W. Jaco, *Lectures on three-manifold topology*, (1980)
- [JaS] W. Jaco, P.B. Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Memoirs Amer. Math. Soc. 220 (1979).
- [Joh] K. Johannson, *Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundary*, Lectures Notes in Mathematics 761 (1979).

- [Jor] T. Jørgensen, *On discrete groups of Möbius transformations*, Amer. J. Math. 98 (1976), 739-749.
- [JoM] T. Jørgensen, A. Marden, *Algebraic and geometric convergence of Kleinian groups*, Math. Scand. 66 (1990), 47-72.
- [Ka] M. Kapovitch, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Progress in Mathematics 183 (2000).
- [KeS] L. Keen, C. Series, *Continuity of convex hull boundaries*, Pac. J. Math. 127 (1988), 457-519.
- [KlS] G. Kleineidam, J. Souto, *Algebraic convergence of function groups*, Comment. Math. Helv. 77 (2002), 244-269.
- [Le] C. Lecuire, *Plissage des variétés hyperboliques de dimension 3*, Prépublication de l'UMPA n°301 (2002).
- [MMS] D. McCullough, A. Miller, G.A. Swarup, *Uniqueness of cores of noncompact 3-manifolds*, J. London Math. Soc. (2) 32 (1985), 548-556.
- [Mar] A. Marden, *The geometry of finitely generated Kleinian groups*, Ann. of Math. 99 (1974), 383-462.
- [Mas1] H. Masur, *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. of Math. (2) 115 (1982), 169-200.
- [Mas2] H. Masur, *Measured foliations and handlebodies*, Ergodic Theory Dynam. Systems 6 (1986), 99-116.
- [MaT] K. Matsuzaki, M. Taniguchi, *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups* (1998).
- [Mo] J.W. Morgan, *Uniformization theorem for Three-Dimensional Manifolds*, The Smithh Conjecture (1984), 37-125.
- [MoO] J.W. Morgan, J.-P. Otal, *Relative growth rates of closed geodesics on surfaces under varying hyperbolic structures*, Comment. Math. Helv., 68 (1993), 171-208.
- [MoS1] J.W. Morgan, P.B. Shalen, *Degenerations of Hyperbolic structures I : Valuations, trees and surfaces*, Ann. of Math., 120 (1984), 401-476.
- [MoS2] J.W. Morgan, P.B. Shalen, *Degenerations of Hyperbolic structures III : actions of 3-manifolds groups on trees and Thurston's compactness theorem*, Ann. of Math. 127 (1988), 457-519.
- [Mo] G. D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Annals of Mathematic Studies. No.78 (1973).
- [Ot1] J.-P. Otal, *Courants géodésiques et produits libres*, Thèse d'Etat, Université Paris-Sud, Orsay (1988).
- [Ot2] J.-P. Otal, *Sur la dégénérescence des groupes de Schottky*, Duke Math. J. 74 (1994), 777-792.
- [Ot3] J.-P. Otal, *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, Astérisque 235 (1996).
- [OtP] J.-P. Otal, F. Paulin, *Géométrie hyperbolique et groupes Kleiniens*, manuscrit non publié.
- [Pa] F. Paulin, *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Invent. Math. 94 (1988), 53-80.
- [Pe] J.L. Harer, R.C. Penner, *Combinatorics of train tracks*, Annals of Mathematics Studies 125 (1992).
- [Ro] C. Rourke, *Convex ruled surfaces*, Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space (1987), 255-272.
- [Se] C. Series, *Quasifuchsian groups with small bending*, Warwick preprint 2002.
- [ShW] A. Shapiro, J.H.C. Whitehead, *A proof and extension of Dehn's lemma*, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 174-178.
- [Sk] R.K. Skora, *Splitting of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 23 (1990), 85-90.
- [Ta] E. Taylor, *Geometric finiteness and the convergence of Kleinian groups*, Com. Anal. Geom. 5 (1997), 497-533.
- [Th1] W.P. Thurston, *The topology and geometry of 3-manifolds*, Notes de cours, Université de Princeton, 1976-79.
- [Th2] W.P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Am. Math. Soc. 19 (1988), 417-431.

- [Th3] W.P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1986), 357-381.
- [Th4] W.P. Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds, II : Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle*, prépublication arXiv :math.GT/9801045 (1998).
- [Th5] W.P. Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds, III : Deformations of 3-manifolds with incompressible boundary*, prépublication arXiv :math.GT/9801058 (1998).
- [Wa1] F. Waldhausen, *Eine Verallgemeinerung des Schleifensatzes*, Topology 6 (1967), 501-504.
- [Wa2] F. Waldhausen, *Heegard-Zerlegungen der 3-Sphäre*, Topology 7 (1968), 195-203.
- [Wa3] F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. Math. 87 (1968), 56-88.